# VADEMECUM

# WISKUNDE

LEON LENDERS

$\mathcal{L}^2$

**Merkwaardige lijnen in een driehoek** : hoogtelijn
bissectrice
middelloodlijn
zwaartelijn

De middelloodlijnen van een driehoek zijn concurrent.
De hoogtelijnen van een driehoek zijn concurrent.
De bissectrices van een driehoek zijn concurrent.
De zwaartelijnen van een driehoek zijn concurrent.

**Kenmerken van congruente driehoeken** :

| | | |
|---|---|---|
| *H* | *Z* | *H* |
| *Z* | *H* | *Z* |
| *Z* | *Z* | *Z* |

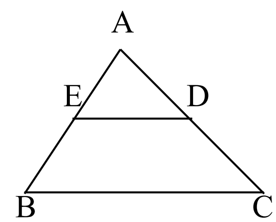
**Kenmerken van gelijkvormige driehoeken** :

$H\,,\,H$

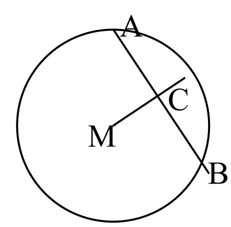
$\frac{Z}{Z},H,\frac{Z}{Z}$

$\frac{Z}{Z},\frac{Z}{Z},\frac{Z}{Z}$

**Middenparallel van een driehoek *abc*:**

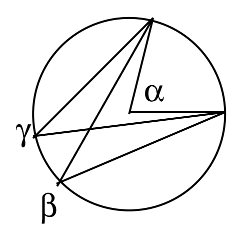



$E$ is het midden van $[AB]$
$D$ is het midden van $[AC]$
$\Downarrow$
$ED \,//\, BC$ en $|ED| = ½\, |BC|$



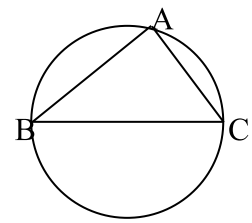

**Middelloodlijn van een koorde *AB* van een cirkel *c(M,r)*** :

$C \in AB$ en $CM \perp AB \Leftrightarrow C$ is het midden van $[AB]$




**Middelpuntshoek ($\alpha$) en omtrekshoek ($\beta,\gamma$) op dezelfde boog** :

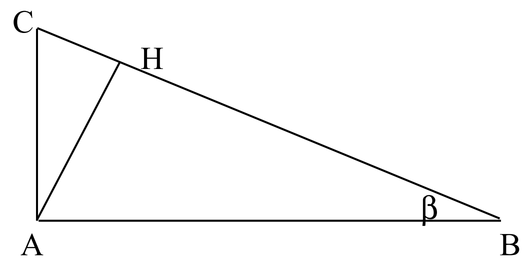
$$\hat{\beta} = \hat{\gamma} = \frac{\hat{\alpha}}{2}$$




**Omtrekshoek (*A*) op een halve cirkel** : $\hat{A} = 90°$

**Stelling van Pythagoras** : $\Delta ABC$ is recht in $A \Rightarrow |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

**Betrekkingen in een rechthoekige driehoek :**




$|AC|.|AB| = |BC|.|AH| \qquad |AH|^2 = |HC|.|HB|$

$|AC|^2 = |BC|.|HC| \qquad |AB|^2 = |BC|.|HB|$

$$\cos(hoek) = \frac{aanligg.zijde}{sch.zijde} \qquad \cos(\beta) = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\sin(hoek) = \frac{overst.zijde}{sch.zijde} \qquad \sin(\beta) = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\tan(hoek) = \frac{overst.zijde}{aanligg.zijde} \qquad \tan(\beta) = \frac{|AC|}{|AB|}$$

**Meetkundige formules :**

| | |
|---|---|
| Omtrek van een cirkel : | omtrek = $2\pi r$ |
| Oppervlakte van een rechthoek : | A = b.l |
| Oppervlakte van een parallellogram : | A = b.h |
| Oppervlakte van een driehoek : | A = ½ b.h |
| Oppervlakte van een trapezium : | A = ½ (B + b).h |
| Oppervlakte van een cirkel : | A = $\pi r^2$ |
| Zijdelingse oppervlakte van een cilinder : | A = $2\pi r.h$ |
| Totale oppervlakte van een cilinder : | A = $2\pi r(r + h)$ |
| Oppervlakte van een bol : | A = $4\pi r^2$ |
| Inhoud van een cilinder : | V = $\pi r^2.h$ |
| Inhoud van een kegel : | V = 1/3 $\pi r^2.h$ |
| Inhoud van een bol : | V = 4/3 $\pi r^3$ |

**Machten en machtswortels :**

$a^m.a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^m = a^m.b^m$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^0 = 1$

$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

$a^{1/2} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$-\sqrt{a^2} = -|a|$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{(-3)^2} = 3$

$-\sqrt{9} = -3$

$-\sqrt{3^2} = -3$

$-\sqrt{(-3)^2} = -3$

$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$\sqrt{x^2} = x \quad als \quad x > 0$

$\sqrt{x^2} = -x \quad als \quad x < 0$

**Hoofdrekenen :**

De kwadraten van de natuurlijke getallen van 1 tot en met 20
De machten van 2 tot en met $2^{12}$
De machten van 3 tot en met $3^{6}$
De machten van 5 tot en met $5^{4}$

**Reële getallen :**

$\forall a,b,c,d \in \Re : a \leq b$ en $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
$\forall a,b,c,d \in \Re^{+} : a \leq b$ en $c \leq d \Rightarrow a.c \leq b.d$
$\forall a,b \in \Re, \forall c \in \Re^{+}_{0} : a < b \Rightarrow a.c < b.c$
$\forall a,b \in \Re, \forall c \in \Re^{-}_{0} : a < b \Rightarrow a.c > b.c$

**Merkwaardige produkten** :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$

**Oplossen en bespreken van de vergelijking *ax + b = 0* :**

$a \neq 0$ : $x = -\dfrac{b}{a}$

$a = 0$ en $b \neq 0$ : geen oplossing
$b = 0$ : $x$ is willekeurig.

**Oplossen van lineaire stelsels van vergelijkingen met 2 onbekenden :**

a. Combinatiemethode: $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{cases} 2x - y = -7 \\ 11x = -22 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

b. Substitutiemethode: $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} (1) \\ (2) \end{vmatrix}$ uit (1) : $y = 2x + 7$

in (2) : $3x + 8x + 28 = 6$
$11x = -22 \Rightarrow x = -2 \quad en \quad y = 3$

**Vergelijking van de rechte** met rico $m$ door punt $P(x_1,y_1)$ : $y - y_1 = m(x - x_1)$

**Vergelijking van de rechte** door de punten $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ met $x_1 \neq x_2$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**Oplossen van een vergelijking van de tweede graad :**

| | | |
|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c = 0$ | $D = b^2 - 4ac$ | $D' = b'^2 - ac$ met $b' = \frac{b}{2}$ |
| $D > 0$ | $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ | $x_1, x_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a}$ |
| $D = 0$ | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ | $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ |
| $D < 0$ | er zijn geen oplossingen. | |

**Functie van de eerste graad :** $y = mx + q$

Nulpunt : $x_0 = -\frac{q}{m}$

Teken :

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $y$ | teg.tek. van $m$ | 0 | teken van $m$ |

Grafiek : rechte

stijgend als $m > 0$, dalend als $m < 0$, // $x$-as als $m = 0$

snijpunt met de $x$-as : $(-\frac{q}{m}, 0)$

snijpunt met de $y$-as : $(0,q)$

**Functie van de tweede graad :** $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Nulpunten :

$$D > 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (= \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a})$$

$$D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad (= -\frac{b'}{a})$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{geen}$$

Teken : $D > 0$

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | tek.van $a$ | 0 | teg.tek.van $a$ | 0 | tek.van $a$ |

$D = 0$

| $x$ | | $x_1 = x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $y$ | teken van $a$ | 0 | teken van $a$ |

$D < 0$

| $x$ | |
|---|---|
| $y$ | teken van $a$ |

Grafiek : parabool

dalparabool als $a > 0$, bergparabool als $a < 0$

snijpunt(en) met de $X$-as : $(x_1,0)$ en $(x_2,0)$ als $D > 0$

$(x_1,0)$ als $D = 0$

geen als $D < 0$

snijpunt met de $Y$-as : $(0,c)$

co(top) = $\left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$

**Bewerkingen met veeltermen :**

Som van twee veeltermen : $f(x) = 2x^2 - 5x + 7 \qquad g(x) = 3x - 5$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1)$

Produkt van twee veeltermen: $f(x) = 2x^2 - 5x + 7 \qquad g(x) = 3x - 5$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 5)$$
$$= 6x^3 - 10x^2 - 15x^2 + 25x + 21x - 35$$
$$= 6x^3 - 25x^2 + 46x - 35$$

Euclidische deling van $f(x)$ door $g(x)$ :

$$\begin{array}{l|l}
\phantom{-}6x^3 + 13x^2 - 3x - 11 & 2x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
-6x^3 - 3x^2 + 9x & 3x + 5 \\ \cline{1-1}
\phantom{-6x^3} 10x^2 + 6x - 11 & \\
\phantom{6x^3} -10x^2 - 5x + 15 & \\ \cline{1-1}
\phantom{-6x^3 - 3x^2 +} x + 4 &
\end{array}$$

$f(x) = 6x^3 + 13x^2 - 3x - 11; \quad g(x) = 2x^2 + x - 3; \quad q(x) = 3x + 5; \quad r(x) = x + 4$

$f(x) = g(x).q(x) + r(x) \qquad 6x^3 + 13x^2 - 3x - 11 = (2x^2 + x - 3)(3x + 5) + (x + 4)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \frac{6x^3 + 13x^2 - 3x - 11}{2x^2 + x - 3} = 3x + 5 + \frac{x + 4}{2x^2 + x - 3}$$

Deling van een veelterm door $x - a$ met de methode van HORNER :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -1 | 7 | 0 |
| -2 | | -2 | 4 | -6 | -2 |
| | 1 | -2 | 3 | 1 | -2 |

$$\frac{x^4 - x^2 + 7x}{x + 2} = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 + \frac{-2}{x + 2}$$

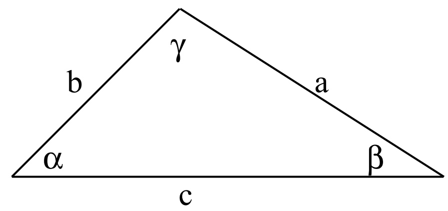
**Deelbaarheid door** $\boldsymbol{x - a}$

$f(x)$ is deelbaar door $x - a \Leftrightarrow$ zijn getalwaarde voor $x = a$ is gelijk aan 0

$(x - a) \mid f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0$

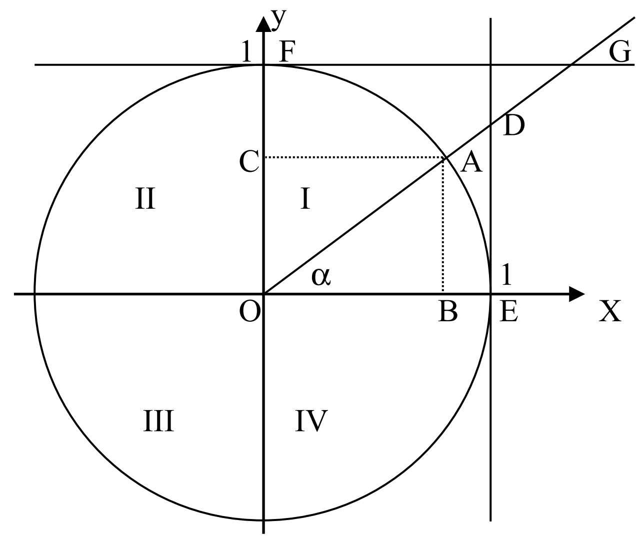
**Betrekkingen in een willekeurige driehoek :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$




$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

**Goniometrische getallen :**



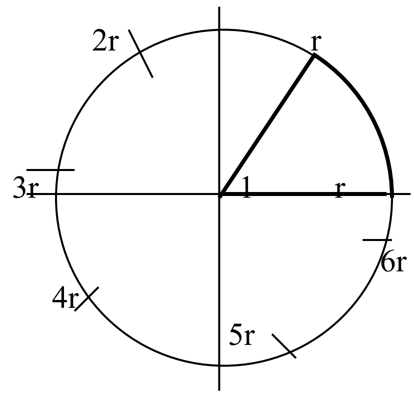

$$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB|}{1} = |OB|$$
$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB| = |OC|$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|DE|}{|OE|} = |DE|$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = |FG|$$

| | $\alpha \in$ | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|---|
| Teken van | $\sin\alpha$ | + | + | - | - |
| | $\cos\alpha$ | + | - | - | + |
| | $\tan\alpha$ | + | - | + | - |

Goniometrische getallen van merkwaardige hoeken :

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| sin α | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos α | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan α | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ? |

**Definitie van de radiaal :**




Eén radiaal is de hoek, die hoort bij een boog,
waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel.

omtrek van de cirkel = 2πr $\Rightarrow$ 360° = 2π rad
$\Rightarrow$ 180° = π (rad)

$$x^0 = \frac{x.\pi}{180}(rad) \qquad x(rad) = \left(\frac{x.180}{\pi}\right)^0$$

**Betrekkingen tussen aanverwante hoeken :**

supplementaire hoeken :

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

antisupplementaire hoeken :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

tegengestelde hoeken :

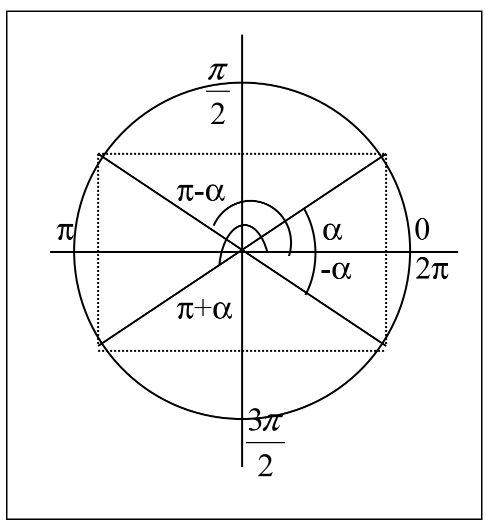
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

gelijke hoeken :

$$\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(2\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

complementaire hoeken :

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$$




De goniometrische getallen van :

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \qquad \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \in I$$

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \in II \qquad \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} \in III$$

$$\frac{5\pi}{3}(=-\frac{\pi}{3}) \quad \frac{7\pi}{4}(=-\frac{\pi}{4}) \quad \frac{11\pi}{6}(=-\frac{\pi}{6}) \in IV$$

**Goniometrische formules :**

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\qquad 1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$ $\qquad 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$ $\qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta$ $\qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\qquad \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha= \quad 2\cos^2\alpha-1= \quad 1-2\sin^2\alpha= \quad \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\qquad \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\qquad \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ $\qquad \cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\qquad \cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

**Grafiek en periode van goniometrische functies :**

De grafiek van $y=\sin x, \quad y=\cos x \quad en \quad y=\tan x$

De grafiek van $y=a.\sin[b.(x-c)]+d$ :

$a$ is de factor van de verticale uitrekking (amplitude) van de functie $y=a.\sin[b.(x-c)]+d$ .
$b$ is de omgekeerde factor van de horizontale uitrekking (frekwentie - periode).
$c$ veroorzaakt een horizontale verschuiving door de vector $\vec{v}\,(c,0)$.
$d$ veroorzaakt een verticale verschuiving door de vector $\vec{v}\,(0, d)$.

$$\text{De periode van} \quad \left[\begin{array}{l} y=\sin(ax) \quad en \quad y=\cos(ax) \quad is \quad \dfrac{2\pi}{|a|} \\ \\ y=\tan(ax) \quad is \quad \dfrac{\pi}{|a|} \end{array}\right.$$

**Goniometrische basisvergelijkingen :**

$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=\alpha+2k\pi \quad of \quad x=\pi-\alpha+2k\pi$

$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=\alpha+2k\pi \quad of \quad x=-\alpha+2k\pi$

$\tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=\alpha+k\pi$

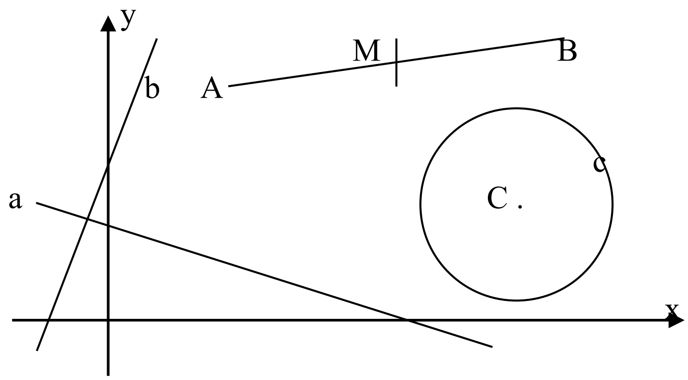
**Cyclometrische functies :**

$\sin\alpha=a \Leftrightarrow (\arcsin a=)Bg\sin a=\alpha \quad met \quad \alpha\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

$\cos\alpha=a \Leftrightarrow (\arccos a=)Bg\cos a=\alpha \quad met \quad \alpha\in[0,\pi]$

$\tan\alpha=a \Leftrightarrow (\arctan a=)Bg\tan a=\alpha \quad met \quad \alpha\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$

**Analytische meetkunde :**




co($A$) = ($x_1$, $y_1$)
co($B$) = ($x_2$, $y_2$)

$a \leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$b \leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2 = 0$

co($C$) = ($m_1$, $m_2$)

afstand tussen twee punten : $d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

midden van een lijnstuk : $co(M) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

richtingen van rechten :

rico $a = -\dfrac{a_1}{b_1}$ rico $b = -\dfrac{a_2}{b_2}$

$a$ // $b \Rightarrow$ rico $a$ = rico $b \Rightarrow a_1.b_2$ - $a_2.b_1 = 0$
$a \perp b \Rightarrow$ rico $a$ . rico $b$ = -1 $\Rightarrow a_1.a_2 + b_1.b_2 = 0$

afstand van punt tot rechte : $d(A,a) = \dfrac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$

vergelijking van de cirkel c(C,r) : $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 - 2m_1x - 2m_2y + m_1^2 + m_2^2 - r^2 = 0$

als $a^2 + b^2 - c \geq 0$ dan is $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ een cirkel
met middelpunt (-$a$,-$b$) en straal r = $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$

stelling van Chasles-Möbius : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$M$ is het midden van $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$

$Z$ is het zwaartepunt van $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

$(ABP) = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} = k \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k.\overrightarrow{OB}}{1 - k}$

$co(\vec{v}) = (x_1, y_1) \quad en \quad co(\vec{w}) = (x_2, y_2) \Rightarrow co(r\vec{v} + s\vec{w}) = (rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2)$

$\vec{V}.\vec{W} = \|\vec{V}\|.\|\vec{W}\|.\cos(\vec{v}, \vec{w}) = x_1x_2 + y_1y_2$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

**Rekenkundige en meetkundige rijen :**

R.R. :

$t_1, t_2, t_3, \ldots.. = \text{R.R.} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : t_{n+1} = t_n + v$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{n(t_1 + t_n)}{2}$$

M.R.

$t_1, t_2, t_3, \ldots.. = \text{M.R.} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : t_{n+1} = t_n \,.\, q$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

**Optelling, scalaire vermenigvuldiging en product van matrices :**

$A,B \in \Re^{m \times n} : A + B = C \Leftrightarrow \quad C \in \Re^{m \times n}$

$\qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}, \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A \in \Re^{m \times n}, \forall\, r \in \Re : r.A = C \Leftrightarrow \quad C \in \Re^{m \times n}$

$\qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}, \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} : c_{ij} = r\, a_{ij}$

$A \in \Re^{m \times n}, B \in \Re^{p \times q}$ :

$n = p \Rightarrow A \,.\, B = C \quad \Leftrightarrow \quad C \in \Re^{m \times q}$

$\qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}, \forall\, j \in \{1,\ldots,q\} : c_{ij} = \sum_{k=1}^{n(=p)} a_{ik} \,.\, b_{kj}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -7 & 1 & 8 \\ 13 & -9 & 27 & -4 \\ 6 & -5 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

**Determinant van een 2 x 2, 3 x 3 - matrix**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 40$$

**Analytische meetkunde in de ruimte $S_0$:**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$co(\vec{v}) = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{v} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$co(A) = (x_1, y_1, z_1), co(B) = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow co(M_{[AB]}) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow |ab| = d(a,b) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

vergelijking van een bol $\Sigma$ met middelpunt $M(m_1,m_2,m_3)$ en straal $r$ :

$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$

als $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ dan is $\Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ een bol

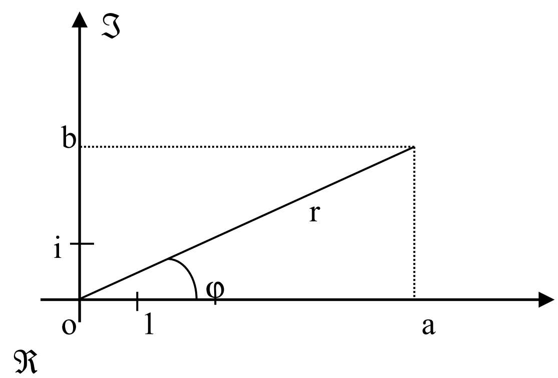
met middelpunt $(-a,-b,-c)$ en straal $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

**Rekenen met complexe getallen C**

C = $\{ a + b.\mathrm{i} : a , b \in \Re \}$

$a$ = reële gedeelte  $b$.i = het imaginaire gedeelte  i = imaginaire eenheid met $\mathrm{i}^2 = -1$

$(a + b.\mathrm{i}) + (c + d.\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d).\mathrm{i}$
$(a + b.\mathrm{i}) \,.\, (c + d.\mathrm{i}) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c).\mathrm{i}$




Goniometrische vorm

$a + b.\mathrm{i} = r.(\cos \varphi + \mathrm{i}.\sin \varphi)$

met $r = \sqrt{a + b.\mathrm{i}} = |a + b.\mathrm{i}|$ = modulus

en $\tan \varphi = \dfrac{b}{a}$ met $\varphi$ = argument .

**Exponentiële en logaritmische functie :**

$y = a^{x}$ :  functieverloop voor $0 < a < 1$ en voor $a > 1$ (zie volgende bladzijde)

$y = {}^{a}\log x \Leftrightarrow a^{y} = x$ met $a \in \Re_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \Re_0^+$

${}^{a}\log 1 = 0$  ${}^{a}\log a = 1$  ${}^{a}\log a^{y} = y$  $a^{{}^{a}\log x} = x$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \Re^+_0 : {}^{a}\log (x_1.x_2.x_3) = {}^{a}\log x_1 + {}^{a}\log x_2 + {}^{a}\log x_3$

$\forall x_1, x_2 \in \Re^+_0 : {}^{a}\log \dfrac{x_1}{x_2} = {}^{a}\log x_1 - {}^{a}\log x_2$

$\forall x \in \Re^+_0, \forall n \in \Re : {}^{a}\log x^{n} = n.{}^{a}\log x$

$\forall a,b \in \Re^+_0 \setminus \{1\}, \forall x \in \Re^+_0 : {}^{b}\log x = \dfrac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log b}$

$y = {}^{a}\log x$ :  functieverloop voor $0 < a < 1$ en voor $a > 1$ (zie volgende bladzijde)

Decimale of Briggse logaritme : $a = 10$

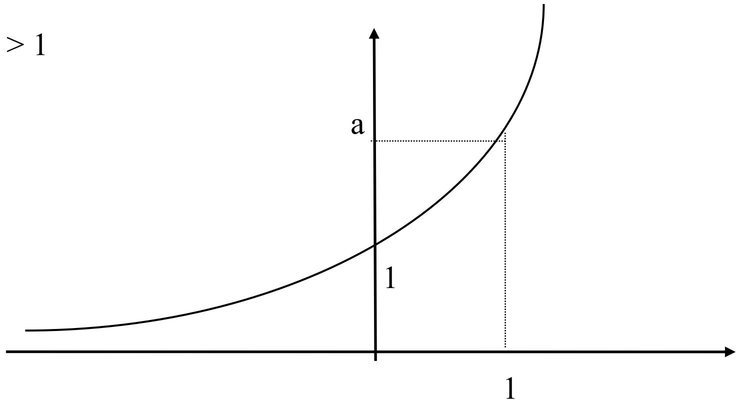
Natuurlijke of Neperiaanse logaritme : $a = e = 2.71828……$

$e$ = grondtal van de exponentiële functie zodat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het vast punt (0 , 1) gelijk is aan 1 .

$y = a^x$ met $a > 1$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

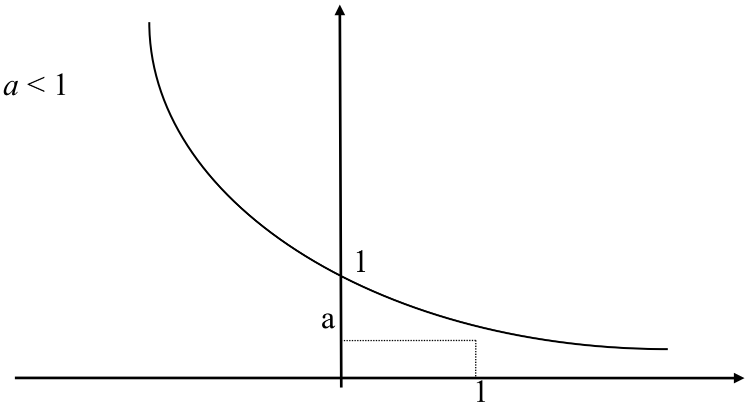
$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$




$y = a^x$ met $0 < a < 1$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

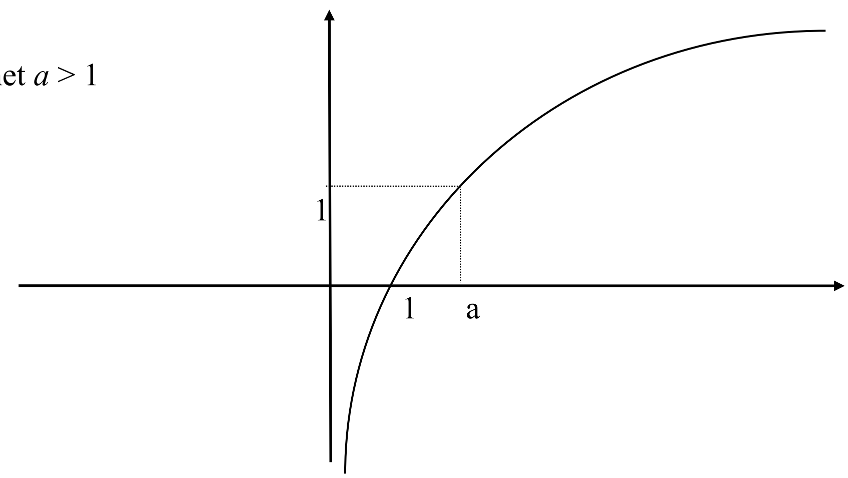
$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$




$y = {}^a\log x$ met $a > 1$

$\lim_{x \to 0} {}^a\log x = -\infty$

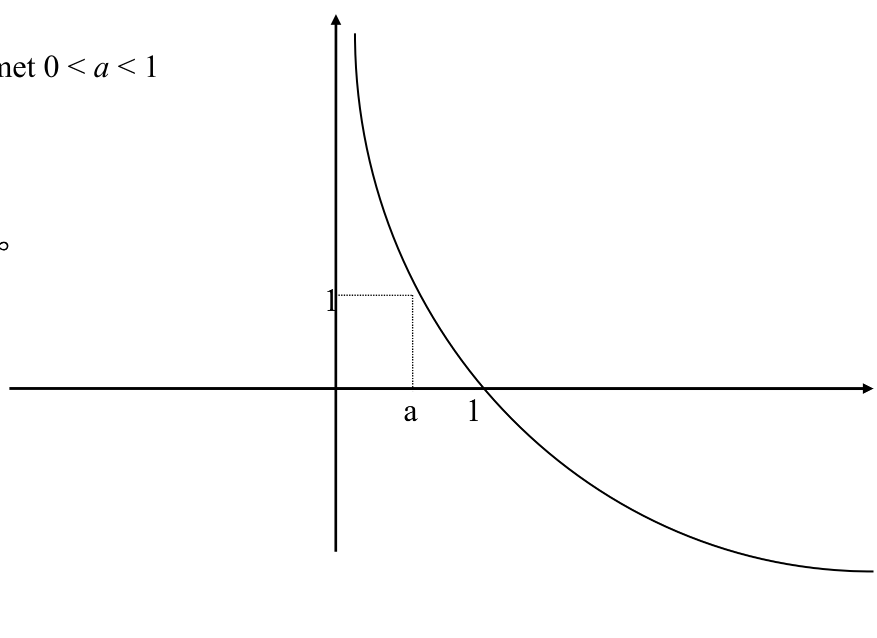
$\lim_{x \to +\infty} {}^a\log x = +\infty$




$y = {}^a\log x$ met $0 < a < 1$

$\lim_{x \to 0} {}^a\log x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} {}^a\log x = -\infty$



**Rationale functies :**

Het domein van een functie is de verzameling van de originelen, waarvoor een beeld bestaat,
(de waarden van x, waarvoor de noemer nul wordt, moeten uitgesloten worden).

De nulpunten van een functie zijn de originelen, waarvoor het beeld nul is,
(de waarde van x, waarvoor de teller nul wordt en de noemer niet nul wordt).

Het tekenverloop van een functie
de nulpunten van de teller (0) en van de noemer ( | ) uitzetten, teken uiterst rechts bepalen, bij ieder nulpunt van teken veranderen (bij een dubbel nulpunt tweemaal van teken veranderen : dus het teken behouden).

$$y = \frac{(2x + x^2 - x^3)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{x(2 + x - x^2)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4)(x - 1)}$$

nulpunten van T : 0, -1, 2, 1, 1
nulpunten van N : -1, -3, 1

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>-</td><td>|</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>|</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr>
</table>

**Rekenregels in** $\overline{\Re} = \Re \cup \{-\infty, +\infty\}$

Onbepaalde gevallen : $(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty$

Bijzondere gevallen : $\frac{0}{\infty} = 0 \qquad \frac{r}{0} = \infty, \frac{\infty}{0} = \infty$ (teken bepalen)

**Limieten :**

* veeltermfuncties :

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to a} = f(a)$$

* rationale functies :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

1) $n < m$ $= 0$

2) $n = m$ $= \frac{a_n}{b_m}$

3) $n > m$ $= +\infty$ of $-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ : volg het onderstaand schema .

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

einde := vals

herhaal

- bereken $\dfrac{f(a)}{g(a)}$
- $g(a) = 0$
  - N:
    - $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$
    - einde := waar
  - J: $f(a) = 0$
    - N:
      - $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = (\infty)$
      - het teken van de teller is gekend;
      - bepaal het teken van de noemer;
      - bepaal het teken van de breuk, links en rechts van a
      - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{matrix}+\infty\\ \text{of}\\ -\infty\end{matrix}$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{matrix}+\infty\\ \text{of}\\ -\infty\end{matrix}$
      - l.lim = r.lim
        - N: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} b.n.$
        - J: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{matrix}+\infty\\ of\\ -\infty\end{matrix}$
      - einde := waar
    - J:
      - $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x-a).f_1(x)}{(x-a).g_1(x)}$
      - $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$
      - vervang $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ door $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$
      - einde := vals

totdat einde = waar

* irrationale functies :

dezelfde regels als voor rationale functies, maar :

- let op het domein van $f$ (de radicandus mag niet negatief worden)
- het geval $\frac{0}{0}$ voor $x \to a$ : teller en noemer rationaal maken door teller en noemer te vermenigvuldigen met dezelfde factor

  formules : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ voor wegwerken van $\sqrt{\ }$
  
  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ of
  
  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ voor wegwerken van $\sqrt[3]{\ }$
- $\sqrt{x^2} = x$ als $x > 0$ $(x \to +\infty)$ $\sqrt{x^2} = -x$ als $x < 0$ $(x \to -\infty)$
- het geval $(+\infty) - (+\infty)$ oplossen door te vermenigvuldigen met en te delen door de toegevoegde tweeterm

**Regel van de l' Hôpital**

Als $h : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ en $f(a) = g(a) = 0$ en $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \Re$

dan geldt : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

met $f'(x)$ en $g'(x)$ is de afgeleide functie van $f(x)$ en $g(x)$ (zie later).

**Asymptoten.**

1. Verticale asymptoot : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow V.A.: x = a$

   bepalen van $a$ :nulpunten van de noemer, die geen nulpunt zijn van de teller
   
   ligging : de (linker- en rechter)limiet bepalen van *f(x)* voor $x \to a$

2. Horizontale asymptoot : $\lim\limits_{x\to\infty} = b \Rightarrow H.A.: y = b$

   bepalen van $b$ : $gr$(teller) $\leq gr$(noemer) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = b \in \Re$
   
   ligging : teken onderzoeken van $h(x) = f(x) - b$ : $h(x) > 0 \Rightarrow f$ boven de asymptoot
   
   $h(x) < 0 \Rightarrow f$ onder de asymptoot

3. Schuine asymptoot : $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$ met $gr$(teller) = $gr$(noemer) + 1

- rationale functie :

  bepalen van de vergelijking : $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{r(x)}{g(x)} \Rightarrow S.A.: y = ax + b$
  
  ligging : tekenonderzoek van $h(x) = \frac{r(x)}{g(x)}$ (zie H.A.)
- irrationale functie :

  bepalen van de vergelijking : $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) \Rightarrow S.A.: y = ax + b$
  
  ligging : teken bepalen van $h(x) = f(x) - (ax+b)$ (zie H.A.)

**Afgeleiden :**

definitie : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

meetkundige betekenis : *rico* van de raaklijn aan de kromme in het punt $(a, f(a))$

$D(c) = 0$ $\qquad$ $D(x) = 1$ $\qquad$ $D(a.x) = a$

$D(u + v) = Du + Dv$ $\qquad$ $D(a.f) = a.Df$ $\qquad$ $D(u.v) = Du.v + u.Dv$

$D(x^n) = n.x^{n-1}$ $\qquad$ $D(f^n) = n.f^{n-1}.Df$

$D\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{Du.v - u.Dv}{v^2}$ $\qquad$ $D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $D\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$

$D(g \circ f) = Dg(f(x)) \,.\, Df(x)$ $\qquad$ of

$y = (g \circ f)(x) = g(u)$ met $u = f(x)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $Dy = Dg(u) \,.\, Df(x)$ met $u = f(x)$

$D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{f(x)}) = e^{f(x)}.Df(x)$

$D(a^x) = a^x.\ln a$ $\qquad$ $D(a^{f(x)}) = a^{f(x)}.\ln a.Df(x)$

$D(u^v) = v.u^{v-1}.Du + u^v.\ln u.Dv$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\ln f(x)) = \dfrac{Df(x)}{f(x)}$

$D({}^a\log x) = \dfrac{1}{x.\ln a}$ $\qquad$ $D({}^a\log f(x)) = \dfrac{Df(x)}{f(x).\ln a}$

$D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$D(Bg\sin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $D(Bg\cos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $D(Bg\tan x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Vergelijking van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ : $y - f(a) = f'(a).(x - a)$

Indien $f'(a)$ niet bestaat (noemer is nul), is de raaklijn verticaal in $a$.

Meetkundige betekenis van de eerste en tweede afgeleide :

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $y''$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $y$ | | max | | bp | | min | |

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

**Integraalrekening :**

$F$ is een primitieve functie van $f \Leftrightarrow F' = f$

$$\int_a^b f(u).du = \left[F(u)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int du = u + c \qquad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$$

$$\int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \Re \setminus \{-1\}) \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\int e^u.du = e^u + c \qquad \int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$\int \sin u.du = -\cos u + c \qquad \int \cos u.du = \sin u + c$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + c \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = Bg\sin u + c \qquad \int \frac{du}{1+u^2} = Bg\tan u + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{k-u^2}} = Bg\sin\frac{u}{\sqrt{k}} + c \qquad \int \frac{du}{k+u^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}Bg\tan\frac{u}{\sqrt{k}} + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + c$$

$$\int \left[f(x)+g(x)\right].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$$

$$\int a.f(x).dx = a.\int f(x).dx$$

$$dx = d(x+a) \qquad d(ax) = a.dx \qquad \textit{of} \qquad dx = \frac{1}{a}.d(ax)$$

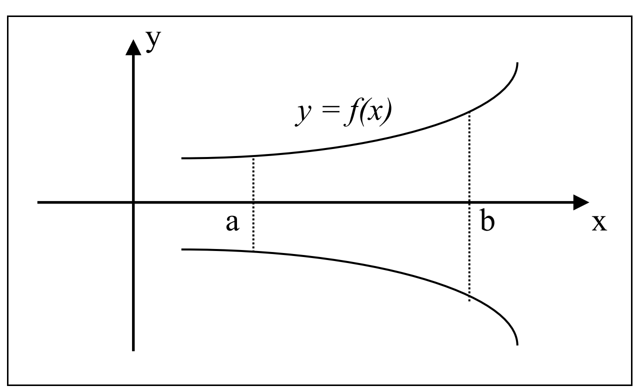
$$\int u.v'.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du = u.v - \int v.u'.dx$$

$$\textit{Oppervlakte}\ (A) = \int_a^b f(x).dx = \int_a^b y.dx$$

$$\textit{Inhoud}\ (V) \qquad = \pi.\int_a^b y^2.dx$$

$$\textit{Lengte}\ (l) \qquad = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}.dx$$

$$\textit{Mantelopp.}(A) \quad = 2\pi\int_a^b y.\sqrt{1+y'^2}.dx$$



**Combinatieleer**

$n!$ ($n$-faculteit) met $n \in N_0 =$ $n.(n-1).(n-2)$……..3.2.1
$0! = 1$

Een **variatie** van $p$ elementen uit $n$ elementen ($p < n$ ) is een geordend $p$-tal van $p$ verschillende elementen uit een verzameling van $n$ elementen.

Het aantal variaties van $p$ elementen uit $n$ elementen $V_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ .

Een **permutatie** van $n$ elementen is een variatie van $n$ elementen uit $n$ elementen.
Het aantal permutaties van $n$ elementen $P_n = n!$

Een **combinatie** van $p$ elementen uit $n$ elementen ($p < n$ ) is een deelverzameling van $p$ (verschillende) elementen uit een verzameling van $n$ elementen.

Het aantal combinaties van $p$ elementen uit $n$ elementen $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ .

Een **herhalingsvariatie** van $p$ elementen uit $n$ elementen is een geordend $p$-tal van $p$ (niet noodzakelijk verschillende) elementen uit een verzameling van $n$ elementen .

Het aantal herhalingsvariaties van $p$ elementen uit $n$ elementen $\overline{V}_n^p = n^p$ .

Driehoek van Pascal

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $p$ | $n$-1 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | $\boxed{5}$ + | $\boxed{10}$ | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| | | | = | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | $\boxed{15}$ | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 7 | $C_7^0$ | $C_7^1$ | $C_7^2$ | $C_7^3$ | $C_7^4$ | $C_7^5$ | $C_7^6$ | $C_7^7$ | | | |
| $n$-1 | | | | | | | | $\boxed{C_{n-1}^{p-1}}$ + | $\boxed{C_{n-1}^{p}}$ | | |
| | | | | | | | | | = | | |
| $n$ | $C_n^0$ | $C_n^1$ | $C_n^2$ | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | $\boxed{C_n^p}$ | $C_n^{n-1}$ | $C_n^n$ |

Ieder element uit de driehoek van Pascal is dus $C_n^p$

$C_n^0 = C_n^n = 1$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
$C_n^p = C_n^{n-p}$

Formule van Pascal :
$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Binomium van Newton : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i . a^{n-i} . b^i$