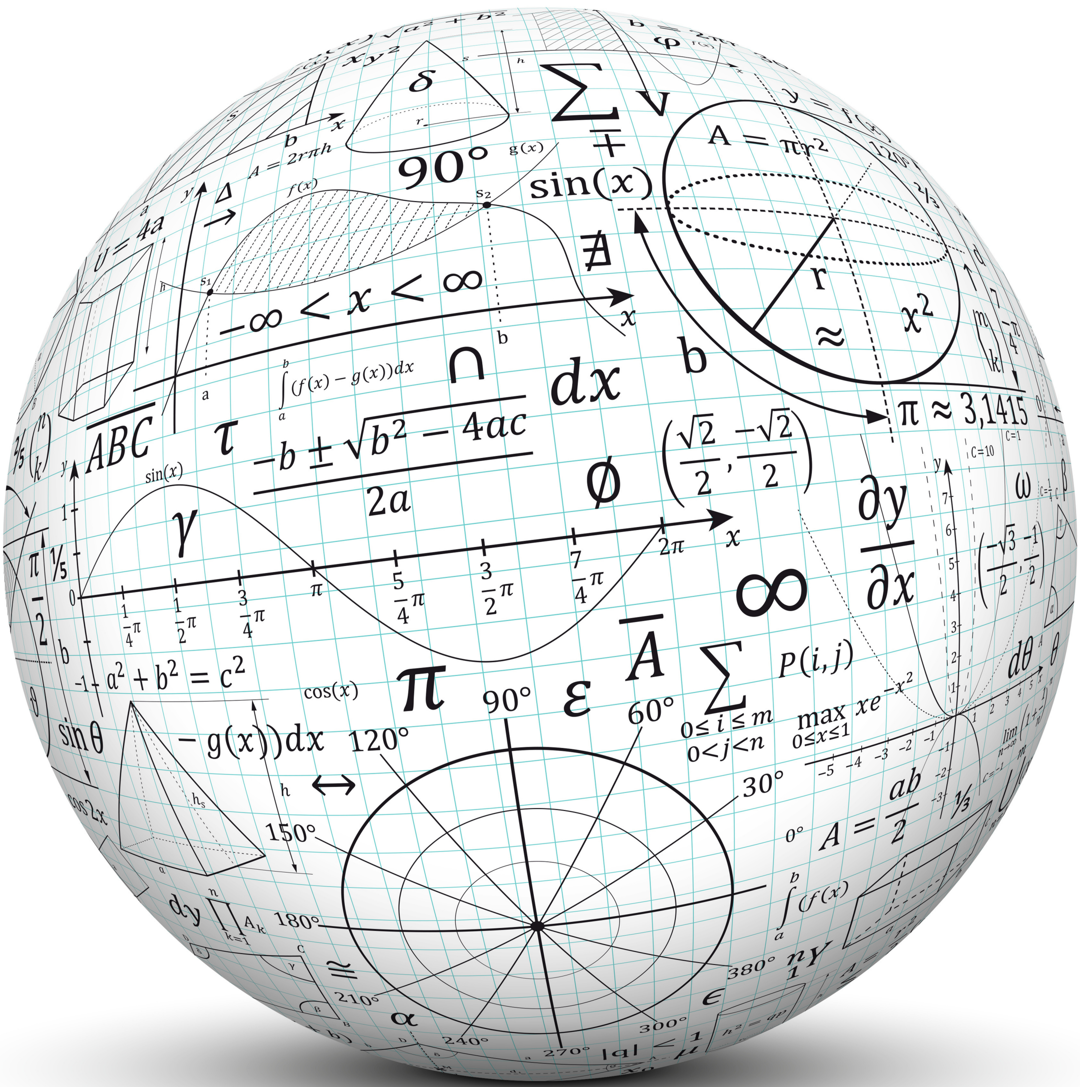
Wiskunde
Samen gevat^2

door

Koen De Naeghel



Wiskunde
Samen gevat^2

door

Koen De Naeghel

Gepubliceerd door: Online uitgever Lulu.com

Omslagfoto: https://www.shutterstock.com/

Tekstzetsysteem: LaTeX

Royalty percentage: 0%

ISBN 978-1-4476-7710-9

Eerste druk, juni 2023

LICENTIEVOORWAARDEN

OVER DIT WERK

De reeks *Wiskunde Samen gevat* heeft één doel: leerlingen van de tweede en de derde graad met doorstroomfinaliteit houvast bieden om basiskennis wiskunde op te zoeken, te (her)begrijpen en te onderhouden.

In dit deel vatten we basiskennis wiskunde samen die leerlingen horen te beheersen om in de derde graad een richting met zes of meer wekelijkse lestijden wiskunde aan te vatten. Niet alles werd samengevat, enkel de leerinhouden die naar onze mening echt essentieel zijn.

Bijzondere aandacht gaat naar notaties, rekenvaardigheden en correct omschrijven van begrippen, formules en eigenschappen. Dit alles wordt verduidelijkt met de vele opgenomen voorbeelden. Waar het ons zinvol lijkt, formuleren we een stappenplan dat kan zorgen voor meer houvast.

Meer subtiele notaties en begrippen worden met extra zorg behandeld; zoals de notatie $\sqrt{x}$ die staat voor *de positieve vierkantswortel van x* (enkel zinvol als $x \in \mathbb{R}^+$), het onderscheid tussen en correct gebruik van de symbolen $=$, $\approx$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ en het begrip georiënteerde hoek.

Af en toe worden fundamentele formules en resultaten voorzien van een argumentatie; zoals bij de stelling van Pythagoras, de grondformule van de goniometrie en de sinusregel. Als begrepen wordt waarom iets geldt, wordt het ook beter onthouden en juister toegepast.

Om bij het elementair rekenwerk de kans op succes te verhogen, pleiten we ervoor het handelingswerkwoord *schrappen* te verbannen, en in plaats daarvan de attitude aan te leren om de handeling meer expliciet te verwoorden, bijvoorbeeld *teller en noemer delen door een twee*.

Het PDF-bestand van dit werk, dat kan afgedrukt worden op A6-formaat met een pocketboekje als resultaat, is vrij beschikbaar op de website

`https://www.koendenaeghel.be/`

WOORD VAN DANK

Wiskunde Samen gevat^2 is opgedragen aan Els Vanlommel, Pedro Tytgat en Luc Gheysens, de drie andere leden van team wiskundeplan, die op 23 mei 2023 zo stoutmoedig waren een alternatief leerplan wiskunde te lanceren. Hun initiatief vertrekt vanuit een positief verhaal, als reactie op de steeds groter wordende achteruitgang van het wiskundeniveau in Vlaanderen. Alle informatie is terug te vinden op de website

`https://wiskundeplan.be`

Dit werk was er wellicht nooit gekomen zonder de aanmoedigingen van Lieven Vanhoutte en Lieselot Vergauwe. Ik ben hen ook erkentelijk voor het nauwkeurig nalezen van de eerste versie en de constructieve feedback die zij mij gegeven hebben, zowel voor wat betreft de vorm als de inhoud.

Evenwaardig ben ik ook de leerlingen dankbaar die sinds 2007 mijn lessen hebben bijgewoond. Hun wil om wiskunde te begrijpen en ook goed te kunnen, de vragen die zij stellen en de oprechte interesse die ze tonen is de bron van motivatie om me voor hen in te zetten, elke les opnieuw.

Aan personen en instanties die overwegen om dit boekje te kopiëren, te verspreiden, door te geven of afgeleide werken te maken: dat kan, maar enkel mits het respecteren van naamsvermelding, beperking van gebruik tot niet-commerciële doeleinden en gelijk delen. Het ontstane werk kan uitsluitend onder de licentie Creative Commons CC BY-NC-SA of gelijksoortig worden verspreid. Meer informatie over de licentie waaronder dit werk valt, is terug te vinden op pagina iii.

Brugge, juni 2023 — KDN

NA DE TWEEDE GRAAD

LOGICA

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Uitspraken	
$P, Q, \ldots$	uitspraken
$\equiv$	... is logisch equivalent met ...
$\not\equiv$	... is niet logisch equivalent met ...

Connectieven		
$\neg$	niet	$\neg(0+0=1)$
$\wedge$	en	$(0+0=0)\wedge(1+1=2)$
$\vee$	of	$(0+0=1)\vee(1+1=2)$
$\Rightarrow$	als ... dan ...	$(x=2)\Rightarrow(x^2=4)$
$\Leftrightarrow$	als en slechts als	$(x^2=4)\Leftrightarrow((x=2)\vee(x=-2))$

Kwantoren		
$\forall\ldots:$	voor alle ... geldt	$\forall n\in\mathbb{N}: n\geq 0$
$\exists\ldots:$	er bestaat een ... waarvoor geldt	$\exists x\in\mathbb{R}: x\notin\mathbb{Q}$

LOGICA 1

UITSPRAKEN

Een uitspraak is een zinvol product van de schrijftaal dat voldoet aan de wet van de uitgesloten derde:

elke uitspraak is ofwel waar (1) ofwel vals (0)

Door uitspraken met elkaar te combineren, kunnen nieuwe uitspraken worden gevormd. Dat doen we met zogenaamde logische connectieven: negatie $\neg$, conjunctie $\wedge$, disjunctie $\vee$, implicatie $\Rightarrow$ en equivalentie $\Leftrightarrow$.

symbool	lees als	betekenis
$\neg P$	niet P	waar enkel en alleen als P vals is
$P \wedge Q$	P en Q	waar enkel en alleen als P waar is en Q waar is
$P \vee Q$	P of Q	vals enkel en alleen als P vals is en Q vals is
$P \Rightarrow Q$	als P dan Q	vals enkel en alleen als P waar is en Q vals is
$P \Leftrightarrow Q$	P als en slechts als Q	waar enkel en alleen als P en Q ofwel beide waar ofwel beide vals zijn

Voorbeelden

(a) Uitspraak $\neg(2+4=7)$ is waar.

(b) Uitspraak $(2^3=8) \wedge (\sqrt{4}=-2)$ is vals.

(c) Uitspraak $(2^3=8) \vee (\sqrt{4}=-2)$ is waar.

(d) Uitspraak $(1<2) \Rightarrow (1+1=0)$ is vals.

(e) Uitspraak $(1<1) \Rightarrow (1+1=0)$ is waar.

(f) Uitspraak $(1<1) \Leftrightarrow (1+1=0)$ is waar.

LOGICA 2

LOGISCH EQUIVALENT

Zij A en B twee uitspraken, samengesteld uit deeluitspraken P, Q etc.

Een waarheidstabel van A is een tabel waarin voor elke combinatie van de waarheidswaarden P, Q etc. staat wat de waarheidswaarde van A is.

Als A en B dezelfde waarheidstabel hebben, dan noemen we A en B logisch equivalent en schrijven we $A \equiv B$.

$\neg(\neg P) \equiv P$	dubbele negatie
$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$	wetten van De Morgan
$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	contrapositie van de implicatie
$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$	disjunctie van de implicatie
$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$	negatie van de implicatie

In het algemeen is

$$\boxed{P \Rightarrow Q \quad \not\equiv \quad Q \Rightarrow P}$$

Voorbeeld 1. Contrapositie van de implicatie met waarheidstabellen:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

en

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

Voorbeeld 2. Uitspraak *als de lift stuk is, dan neem ik de trap* is logisch equivalent met *als ik de trap niet neem, dan is de lift niet stuk.*

LOGICA 3

KWANTOREN

Heel wat wiskundige uitspraken zijn van de vorm *voor alle* of *er bestaat*. Om die te kunnen uitdrukken, gebruiken we de universele kwantor $\forall$ en de existensiële kwantor $\exists$.

symbool	lees als	voorbeeld
$\forall \ldots :$	voor alle … geldt	$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$
$\exists \ldots :$	er bestaat … waarvoor geldt	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$

Als je een eenvoudige uitspraak in woorden krijgt, moet je in staat zijn om die uitspraak te formaliseren: uitdrukken in symbolen, met behulp van kwantoren en eerder geziene connectieven.

Voorbeelden

(a) Er bestaat een natuurlijk getal dat tussen 3 en 5 ligt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : 3 < n < 5.$$

De naam van de variabele is onbelangrijk, dus ook goed is:

$$\exists x \in \mathbb{N} : 3 < x < 5.$$

(b) Als x een reëel getal is waarvoor $x > 5$, dan is $x^2 > 25$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 5 \Rightarrow x^2 > 25.$$

(c) Voor elk reëel getal bestaat er een natuurlijk getal dat groter is dan dit reëel getal:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

LOGICA 4

BEWIJSTECHNIEKEN

Een wiskundig bewijs is een sluitende redenering die de lezer overtuigt dat een bepaalde uitspraak waar of vals is.

Om zo'n bewijs op te stellen, zijn een aantal technieken voorhanden. Op de volgende pagina's geven we voorbeelden van uitspraken met bewijs.

P is waar	
bewijs uit **ongerijmde**:	neem aan dat uitspraak P niet waar is en laat zien dat dit leidt tot een strijdigheid

$P \Rightarrow Q$ is waar	
rechtstreeks bewijs:	neem aan dat P waar is, toon dat Q waar is
bewijs door **contrapositie**:	neem aan Q is vals, toon dat P vals is

$\forall x \ldots : P$ is waar	
bewijs per **willekeurig element**:	neem x willekeurig en toon dat voor die x uitspraak P waar is

$\exists x \ldots : P$ is waar	
bewijs door **voorbeeld**:	geef een specifieke x en laat zien dat voor die x uitspraak P waar is

$\forall x \ldots : P$ is vals betekent $\exists x \ldots : \neg P$ is waar	
bewijs door **tegenvoorbeeld**:	geef een specifieke x en laat zien dat voor die x uitspraak P vals is

$\exists x \ldots : P$ is vals betekent $\forall x \ldots : \neg P$ is waar	
bewijs per **willekeurig element**:	neem x willekeurig en toon dat voor die x uitspraak P waar is

LOGICA 5

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

Een bewijs uit het ongerijmde is een techniek om aan te tonen dat een uitspraak P waar is door eerst aan te nemen dat ze niet waar is, en om dan te laten zien dat deze aanname leidt tot een tegenspraak.

	P is waar
bewijs uit ongerijmde:	neem aan dat P niet waar is en laat zien dat je dan een tegenstrijdigheid verkrijgt

Voorbeeld 1. Toon aan: er bestaat geen grootste natuurlijk getal.

Bewijs uit het ongerijmde. Neem aan dat de uitspraak niet waar is, dus neem aan dat er wel een grootste natuurlijk getal N is. Omdat $N+1$ ook een natuurlijk getal is, zou dan N groter zijn dan $N+1$, en dat kan niet. Dus er bestaat geen grootste natuurlijk getal. □

Voorbeeld 2. Toon aan: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Bewijs uit het ongerijmde. Neem aan dat de uitspraak niet waar is, dus neem aan dat $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dan is $\sqrt{2}$ een breuk van twee gehele getallen die na vereenvoudiging niet beide even zijn:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{met } a \text{ en } b \text{ niet beide even.}$$

Dan is $2b^2 = a^2$. Dus a^2 is even, zodat a even is. Maar dan is $2b^2$ een veelvoud van 4 zodat ook b^2 even is, en dus ook b even is. Dit is in strijd met het feit a en b niet beide even zijn. □

Het symbool □ staat hier voor het symbool van Halmos, en geeft aan waar een bewijs eindigt. Het vervangt de klassieke afkorting q.e.d. van de Latijnse uitdrukking *quod erat demonstrandum*, vertaald: *hetgeen bewezen moest worden*.
De uitspraak $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ even } \Rightarrow n \text{ even}$ wordt verderop bewezen.

LOGICA 6

RECHTSTREEKS BEWIJS

Een rechtstreeks bewijs is een techniek om aan tonen dat een implicatie

$$P \Rightarrow Q$$

waar is door aan te nemen dat uitspraak P waar is, en om dan te laten zien dat dan noodzakelijk ook uitspraak Q waar is.

$P \Rightarrow Q$ is waar
rechtstreeks bewijs: neem aan dat P waar is, toon dat Q waar is

Voorbeeld 1. Zij n een natuurlijk getal. Toon aan:

$$n \text{ even} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ even.}$$

Rechtstreeks bewijs. Als n even is, dan is $n = 2k$ voor een zeker natuurlijk getal k. Welnu,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

zodat ook n^2 even is. $\square$

Voorbeeld 2. Jouw vriend doet de uitspraak:

als het vrijdag is, dan eet ik geen vlees.

Om na te gaan of jouw vriend de waarheid spreekt, volstaat het om elke vrijdag te controleren dat jouw vriend die dag geen vlees eet.

Omdat $P \Rightarrow Q$ altijd waar is als P vals is, valt er in dat geval niets te bewijzen. Het volstaat dus aan te nemen dat P waar is en te tonen dat dan ook Q waar is.

LOGICA 7

BEWIJS DOOR CONTRAPOSITIE

Een implicatie is logisch equivalent met zijn contrapositie:

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad (\neg Q) \Rightarrow (\neg P).$$

Een bewijs door contrapositie is een techniek om aan te tonen dat $P \Rightarrow Q$ waar is door aan te tonen dat $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ waar is.

$P \Rightarrow Q$ is waar betekent $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ is waar
bewijs door contrapositie: neem aan Q is vals, toon dat P vals is

Voorbeeld 1. Zij n een natuurlijk getal. Toon aan:

$$n^2 \text{ even} \;\Rightarrow\; n \text{ even}.$$

Bewijs door contrapositie. We zullen aantonen:

$$n \text{ oneven} \;\Rightarrow\; n^2 \text{ oneven}.$$

Als n oneven is, dan is $n = 2k+1$ voor een zeker natuurlijk getal k. Welnu,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

zodat ook n^2 oneven is. $\square$

Voorbeeld 2. Jouw vriend doet de uitspraak:

als het vrijdag is, dan eet ik geen vlees.

Die uitspraak is logisch equivalent met:

als ik vlees eet, dan is het niet op een vrijdag.

Dus om na te gaan of jouw vriend de waarheid spreekt, volstaat het om telkens als hij vlees eet te controleren of het die dag geen vrijdag is.

LOGICA 8

BEWIJS PER WILLEKEURIG ELEMENT

Om aan te tonen dat een uitspraak van de vorm

$$\forall x \ldots : P$$

waar is, moet je laten zien dat P waar is voor elke mogelijke x. Daarom start je jouw bewijs door eerst een willekeurige x te nemen, en vervolgens aan te tonen dat voor die gekozen x de uitspraak P waar is. Dat noemen we een bewijs per willekeurig element.

$\forall x \ldots : P$ is waar	
bewijs per willekeurig element:	neem x willekeurig en toon dat voor die x uitspraak P waar is

Voorbeeld 1. Toon aan dat $\forall q \in \mathbb{Q} : q^2 \in \mathbb{Q}$.

Bewijs per willekeurig element. Neem $q \in \mathbb{Q}$ willekeurig. Dan is q een quotiënt van twee gehele getallen a en b:

$$q = \frac{a}{b}.$$

Op die manier is:

$$q^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

opnieuw een quotiënt van twee gehele getallen, namelijk a^2 en b^2.
We besluiten dat $q^2 \in \mathbb{Q}$. □

Voorbeeld 2. Jouw vriendin doet de uitspraak:

elke zwaan is wit.

Om aan te tonen dat jouw vriendin de waarheid spreekt, zou je een willekeurige zwaan moeten nemen en controleren of die zwaan wit is. In principe zou je dan elke zwaan moeten nagaan!

LOGICA 9

BEWIJS DOOR VOORBEELD

Om aan te tonen dat een uitspraak van de vorm

$$\exists x \ldots : P$$

waar is, moet je laten zien dat er minstens één x bestaat waarvoor de uitspraak P waar is. Je kan zo'n uitspraak dus bewijzen door een voorbeeld te geven.

$\exists x \ldots : P$ is waar	
bewijs door **voorbeeld**:	geef een specifieke x en laat zien dat voor die x uitspraak P waar is

Voorbeeld 1. Toon aan dat $\exists a \in \mathbb{Z} : a \notin \mathbb{N}$.

Bewijs door voorbeeld. Kies $a = -1$. Dan is $a \notin \mathbb{N}$. $\square$

Voorbeeld 2. Toon aan dat $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ en $x \neq 2$.

Bewijs door voorbeeld. Kies $x = -2$. Dan is $x^2 = 4$ en $x \neq 2$. $\square$

Voorbeeld 3. Jouw tante doet de uitspraak:

sommige zwanen zijn zwart.

Om dat te bewijzen, volstaat het om één zwaan te tonen die zwart is.

Voorbeeld 4. Zij $p, q \in \mathbb{Q}$ met $p < q$. Toon aan dat er een rationaal getal tussen p en q bestaat.

Bewijs door voorbeeld. Kies $x = \frac{p+q}{2}$ het gemiddelde van p en q. Dan:

$$x = \frac{p+q}{2} < \frac{q+q}{2} = \frac{2q}{2} = q$$

zodat $x < q$. Analoog is ook $p < x$. We besluiten dat x een rationaal getal is dat tussen p en q ligt. $\square$

LOGICA 10

BEWIJS DOOR TEGENVOORBEELD

Om aan te tonen dat een uitspraak van de vorm

$$\forall x \ldots : P$$

vals is, moet je laten zien dat er minstens één x bestaat waarvoor de uitspraak P niet waar is. Je kan zo'n uitspraak dus bewijzen door een tegenvoorbeeld te geven.

$\forall x \ldots : P$ is vals betekent	$\exists x \ldots : \neg P$ is waar
bewijs door **tegenvoorbeeld**:	geef een specifieke x en laat zien dat voor die x uitspraak P vals is

Voorbeeld 1. Toon aan dat de uitspraak $\forall m \in \mathbb{Z} : m \geq 0$ vals is.

Bewijs door tegenvoorbeeld. Kies $m = -3$. Dan is niet $m \geq 0$. □

Voorbeeld 2. Toon aan dat $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ vals is.

Bewijs door tegenvoorbeeld. Kies $x = -3$. Dan is $x^2 = (-3)^2 = 9$ en toch is $x \neq 3$. □

Voorbeeld 3. Toon aan dat $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ vals is.

Bewijs door tegenvoorbeeld. Kies $x = -3$. Dan is $x \in \mathbb{R}$, en $x^2 = 9$ is waar terwijl $x = 3$ vals is, zodat in dit geval de uitspraken $x^2 = 9$ en $x = 3$ niet equivalent zijn. □

Voorbeeld 4. Jouw vriendin doet de uitspraak:

elke zwaan is wit.

Om aan te tonen dat jouw vriendin liegt, volstaat het om één zwaan te tonen die niet wit is.

LOGICA 11

WAAR/VALS ARGUMENTEREN

Een veelgestelde vraag is om een uitspraak van de vorm

$$\forall x \ldots : P \quad \text{of} \quad \exists x \ldots : P$$

te beoordelen (waar of vals) en om je antwoord te beargumenteren. Daarbij komen de vorige bewijstechnieken van pas: bewijs per willekeurig element, door voorbeeld, door tegenvoorbeeld of uit het ongerijmde.

uitspraak	oordeel	hoe argumenteren/bewijzen
$\forall x \ldots : P$	waar	neem x willekeurig, toon aan dat P waar is
$\exists x \ldots : P$	waar	geef een voorbeeld: een x waarvoor P waar is
$\forall x \ldots : P$	vals	geef een tegenvoorbeeld: x waarvoor P vals is
$\exists x \ldots : P$	vals	neem x willekeurig, toon aan dat P vals is

Voorbeelden

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$ is waar, bewijs: neem $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan is $x^2 \geq 0$ terwijl $-1 < 0$. Dus is $x^2 \neq -1$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ is waar, bewijs met voorbeeld: kies $x = -2$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ is vals, bewijs met tegenvoorbeeld: kies $x = -2$, dan is $x^2 = 4$ en toch is $x \neq 2$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ is vals, bewijs uit ongerijmde: mocht er toch zo'n $x \in \mathbb{R}$ bestaan, zou $-1 = x^2 \geq 0$, een tegenstrijdigheid.

De letter P staat hier voor een uitspraak waarin de variabele x kan voorkomen, bijvoorbeeld $x^2 \neq 1$ of $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.

VERZAMELINGEN

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Voorstellen van verzamelingen		
$\{\}$ of $\emptyset$	de lege verzameling	
$\{\square\}$	de verzameling van het element $\square$, singleton $\square$	$\{3\}$
$\{\square,\triangle\}$	de verzameling van $\square$ en $\triangle$	$\{1,7\}$
$\{\square,\triangle,\ldots\}$	de verzameling van $\square$, $\triangle$ enzovoort	$\{0,1,2,\ldots\}$
$\{\square \mid \ldots\}$	de verz. van alle $\square$ waarvoor geldt...	$\{x\in\mathbb{R} \mid x^2=4\}$

Kenmerken van verzamelingen		
$\in$	is element van	$7\in\{1,2,7\}$
$\notin$	is geen element van	$5\notin\{1,2,7\}$
#	het aantal elementen van, het kardinaalgetal van	$\#\{1,2,7\}=3$
min	het kleinste element van, het minimum van	$\min\{1,2,7\}=1$
max	het grootste element van, het maximum van	$\max\{1,2,7\}=7$

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Vergelijken van verzamelingen		
$=$	is gelijk aan	$\{1,2\} = \{2,1\}$
$\neq$	is niet gelijk aan	$\{1,2\} \neq \{1,2,3\}$
$\subseteq$	is deelverzameling van	$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
$\nsubseteq$	is geen deelverzameling van	$\{1,2,3\} \nsubseteq \{1,2\}$
$\subset$	is strikte deelverzameling van	$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$
$\not\subset$	is geen strikte deelverzameling van	$\{1,2\} \not\subset \{1,2\}$

Bewerkingen met verzamelingen		
$\cap$	doorsnede	$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
$\cup$	unie	$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
$\setminus$	verschil	$\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$

VERZAMELINGEN 1

BESCHRIJVINGEN

Een verzameling A bestaat uit objecten die we haar elementen noemen. Elementen worden niet herhaald en hun volgorde is onbelangrijk.

Als a tot A behoort, schrijven we: $a \in A$. Anders schrijven we: $a \notin A$.

We kunnen een verzameling beschrijven door

- ▷ de elementen op te sommen met het geheel tussen accolades, of
- ▷ voorwaarden die de elementen vastleggen: lees $\mid$ als *waarvoor geldt*.

De lege verzameling is de verzameling zonder elementen: notatie $\{\}$ of $\emptyset$.

We stellen een verzameling schematisch voor met een venndiagram.

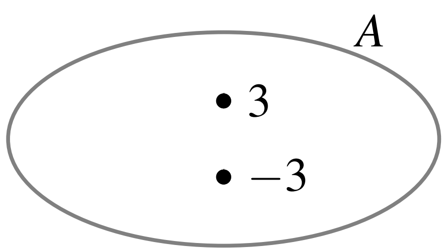
Voorbeeld 1. Beschouw de verzameling A met de objecten 3 en -3.

(a) $-3 \in A$ en $5 \notin A$

(b) $A = \{3, -3\}$ is een beschrijving door opsomming
$A = \{-3, 3\}$ want volgorde is onbelangrijk

(c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ is een beschrijving door voorwaarden
$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a^2 = 9\}$ want naam variabele is onbelangrijk

(d) Voorstelling met venndiagram:



Voorbeeld 2. Noem B de verzameling van even natuurlijke getallen.

(a) $B = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

(b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ is een gehele deler van } n\}$ of $B = \{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$

VERZAMELINGEN 2

DEELVERZAMELINGEN

Zijn A en B verzamelingen, dan noemen we A een deelverzameling van B als elk element van A ook een element is van B: notatie $A \subseteq B$.
Is dat niet zo, dan schrijven we $A \not\subseteq B$.

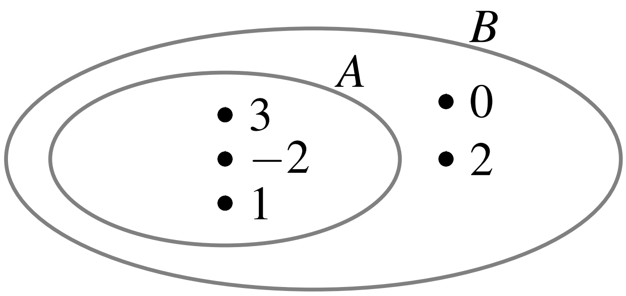
$$\boxed{\begin{array}{lcl} A \subseteq B & \Leftrightarrow & \forall x \in A : x \in B \\ A \not\subseteq B & \Leftrightarrow & \exists x \in A : x \notin B \end{array}}$$

Twee verzamelingen A en B zijn gelijk als A een deelverzameling is van B en als B een deelverzameling is van A. We schrijven dan $A = B$.
Is dat niet zo, dan schrijven we $A \neq B$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A = B & \Leftrightarrow & A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A \\ A \neq B & \Leftrightarrow & A \not\subseteq B \text{ of } B \not\subseteq A \end{array}}$$

Voorbeelden

(a) Bij $A = \{-2, 1, 3\}$ en $B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ is $A \subseteq B$ en $B \not\subseteq A$. Voorstelling met venndiagramen:



(b) $\{-2, 1, 3\} = \{3, -2, 1\}$

(c) $\{-2, 1, 3\} \neq \{-2, 0, 1, 2, 3\}$

(d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ want elk natuurlijk getal is een geheel getal.

(e) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ want er is een geheel getal dat geen natuurlijk getal is.

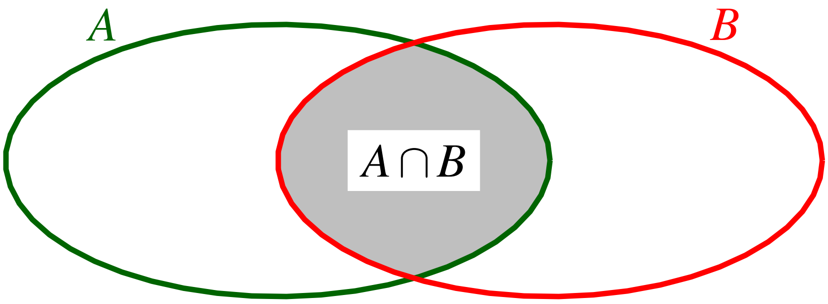
VERZAMELINGEN 3

DOORSNEDE

Zijn A en B verzamelingen, dan is de doorsnede van A en B de verzameling van alle elementen die zowel tot A als tot B behoren:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}}$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Basiseigenschappen voor doorsnede (A, B en C verzamelingen):

$$\boxed{\begin{array}{lll}
A \cap B \subseteq A & \text{en} & A \cap B \subseteq B \\[1em]
A \cap A = A & \text{en} & A \cap \emptyset = \emptyset \\[1em]
A \cap B = B \cap A & & \text{commutativiteit} \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & & \text{associativiteit} \\[1em]
A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cap B = A
\end{array}}$$

Als $A \cap B = \emptyset$ dan noemen we A en B disjunct.

Voorbeeld. Als $A = \{1,3,5,6\}$ en $B = \{2,3,4,6\}$, dan is

$$A \cap B = \{3,6\}.$$

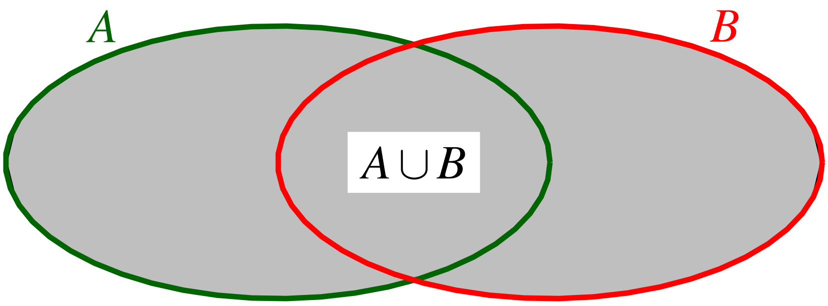
VERZAMELINGEN 4

UNIE

Zijn A en B verzamelingen, dan is de unie van A en B de verzameling van alle elementen die tot A of tot B behoren:

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}}$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Basiseigenschappen voor unie (A, B en C verzamelingen):

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{en} \quad B \subseteq A \cup B$$

$$A \cup A = A \quad \text{en} \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{commutativiteit}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \text{associativiteit}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right. \qquad \text{distributiviteit}$$

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

Als $A \cap B = \emptyset$ dan noemen we $A \cup B$ een disjuncte unie.

Voorbeeld. Als $A = \{1, 3, 5, 6\}$ en $B = \{2, 3, 4, 6\}$, dan is

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

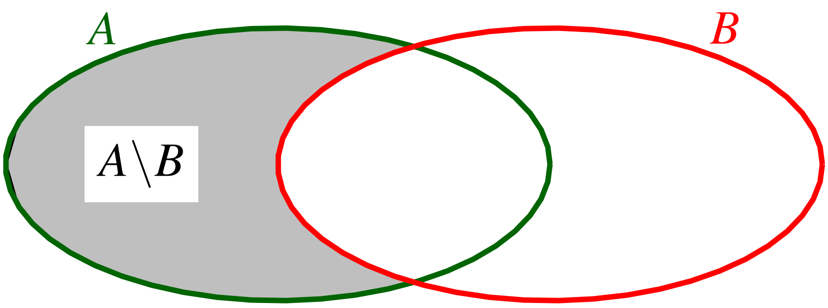
VERZAMELINGEN 5

VERSCHIL

Zijn A en B verzamelingen, dan is het verschil van A met B de verzameling van alle elementen die wel tot A maar niet tot B behoren:

$$\boxed{A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}}$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Basiseigenschappen voor verschil (A, B en C verzamelingen):

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A \setminus B \subseteq A & \text{en} & B \setminus A \subseteq B \\ A \setminus A = \emptyset & \text{en} & A \setminus \emptyset = A \\ A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \setminus B = \emptyset \end{array}}$$

Je kan elke unie schrijven als een disjuncte unie van drie verzamelingen:

$$\boxed{A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)}$$

Voorbeeld. Als $A = \{1,3,5,6\}$ en $B = \{2,3,4,6\}$, dan is

$$A \setminus B = \{1,5\} \quad \text{en} \quad B \setminus A = \{2,4\}.$$

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Vergelijken van getallen		
$=$	is gelijk aan	$2 = 2$
$\neq$	is niet gelijk aan	$0 \neq 1$
$\approx$	is ongeveer gelijk aan	$\pi \approx 3,14$
$<$	is kleiner dan	$0 < 1$
$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan	$2 \leq 2$
$>$	is groter dan	$1 > 0$
$\geq$	is groter dan of gelijk aan	$8 \geq 7$
$\mid$	is een gehele deler van	$-3 \mid 9$
$\nmid$	is geen gehele deler van	$-3 \nmid 5$

Kenmerken van getallen		
≥ 0	is positief	$0 \geq 0$
> 0	is strikt positief	$2 > 0$
≤ 0	is negatief	$-3 \leq 0$
< 0	is strikt negatief	$-3 < 0$

Bijzondere symbolen		
$+\infty$	plus oneindig	$+\infty \notin \mathbb{R}$
$-\infty$	min oneindig	$-\infty \notin \mathbb{R}$
`E`	maal tien tot de macht	`3E2` $= 300$

GETALLEN

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Getallenverzamelingen	
$\mathbb{N}$	de verzameling van de natuurlijke getallen
$\mathbb{Z}$	de verzameling van de gehele getallen
$\mathbb{Q}$	de verzameling van de rationale getallen
$\mathbb{R}$	de verzameling van de reële getallen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	de verzameling van de irrationale getallen
$\mathbb{N}_0$	de verzameling van de natuurlijke getallen zonder nul
$\mathbb{Z}_0$	de verzameling van de gehele getallen zonder nul
$\mathbb{Q}_0$	de verzameling van de rationale getallen zonder nul
$\mathbb{R}_0$	de verzameling van de reële getallen zonder nul
$\mathbb{R}^+$	de verzameling van de positieve reële getallen
$\mathbb{R}^-$	de verzameling van de negatieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^+$	de verzameling van de strikt positieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^-$	de verzameling van de strikt negatieve reële getallen
$]a,b[$	open interval van a tot b (met $a < b$)
$[a,b[$	halfopen interval van a tot b met a erbij (met $a < b$)
$]a,b]$	halfopen interval van a tot b met b erbij (met $a < b$)
$[a,b]$	gesloten interval van a tot b (met $a < b$)
$]a,+\infty[$	open interval van a tot $+\infty$
$]-\infty,a[$	open interval van $-\infty$ tot a
$]-\infty,a]$	halfopen interval van $-\infty$ tot a
$]-\infty,+\infty[$	interval van $-\infty$ tot $+\infty$

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Kenmerken van getallen		
$\in \mathbb{Q}$	is een rationaal getal, dus is een breuk van twee gehele getallen	$\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	is een irrationaal getal, dus is geen breuk van twee gehele getallen	$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Bijzondere irrationale getallen	
π	de cirkelconstante pi $3,141\,592\,653\,589\,793\ldots$ de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel
$\sqrt{2}$	de positieve vierkantwortel van twee $1,414\,213\,562\,373\,095\ldots$ de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde 1
φ	de gulden snede $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\,033\,988\,749\,894\ldots$ de verhouding tussen twee lengten a en b zodat $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$
C_{10}	de constante van Champerowne $0,123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\ \ldots$ nul gevolgd door alle natuurlijke getallen als decimalen na elkaar opgeschreven

GETALLEN 1

NATUURLIJKE EN GEHELE GETALLEN

Een cijfer is een element van de verzameling

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

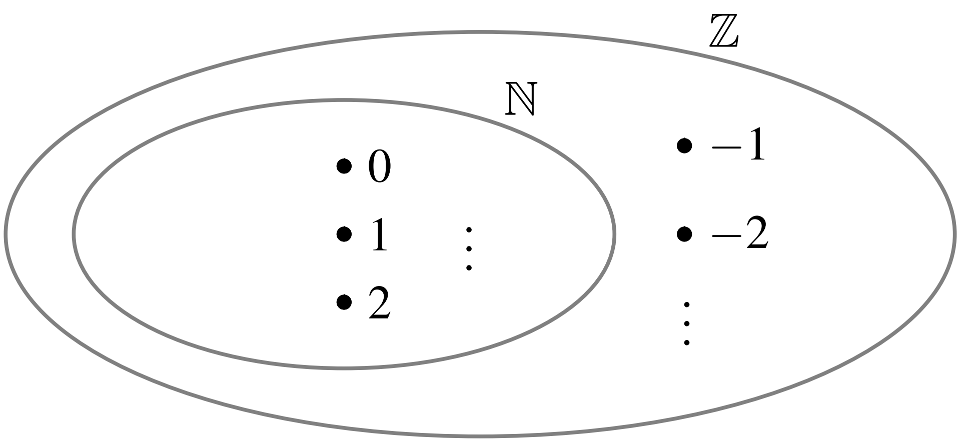
Een natuurlijk getal is een element van de verzameling

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

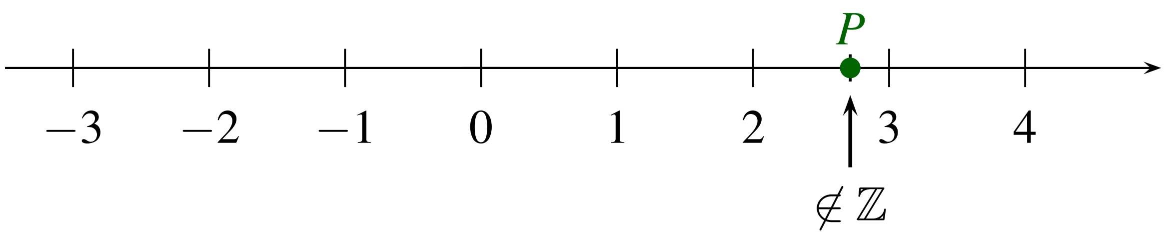
Een geheel getal is een element van de verzameling

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}.$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Een getallenas is een rechte waarop elk geheel getal wordt geplaatst zodat opeenvolgende getallen op gelijke afstand van elkaar liggen.



Bij elk geheel getal hoort een punt van de getallenas, maar niet omgekeerd. Zo hoort bij bovenstaand punt P geen geheel getal.

GETALLEN 2

PRIEMGETALLEN

Voor $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{Z}_0$ zeggen we dat b een gehele deler van a is als er een geheel getal q bestaat waarvoor $qb = a$, in symbolen:

$$\boxed{b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} : qb = a}$$

In dat geval noemen we a deelbaar door b. Anders schrijven we $b \nmid a$.

Deelbaarheid door 0 blijft ongedefinieerd, zodat de schrijfwijzen $0 \mid a$ en $0 \nmid a$ beide geen betekenis hebben en dus zinloze uitspraken zijn.

Een priemgetal is een geheel getal dat precies vier gehele delers heeft.

Er geldt:

$$\boxed{\text{er zijn oneindig veel priemgetallen;}}$$

$$\boxed{\text{elk geheel getal ongelijk aan nul is een product van priemgetallen}}$$

en zo'n schrijfwijze wordt een ontbinding in priemfactoren genoemd.

Bij voorkeur plaatsen we eventuele mintekens voorop en rangschikken we de positieve priemgetallen van klein naar groot.

Voorbeelden

(a) $-3 \mid 15$ want er bestaat een $q \in \mathbb{Z}$ zodat $-3q = 15$, nl. $q = -5$.

(b) De gehele delers van -15 zijn 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15 en -15.

(c) $4 \mid 0$

(d) 2, 3, -7 en 541 zijn priemgetallen.

(e) 0, 1, -4 en 2023 zijn geen priemgetallen.

(f) $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$ is een ontbinding in priemfactoren.

(g) $-918 = -2 \cdot 3^3 \cdot 17$ is een ontbinding in priemfactoren.

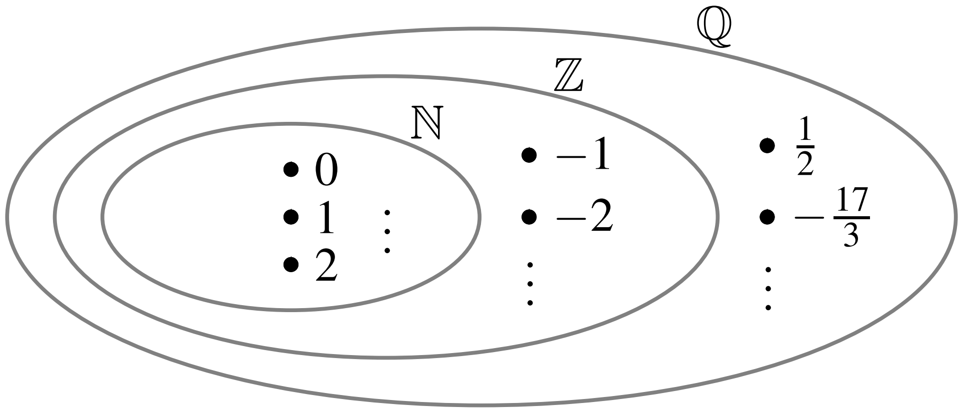
GETALLEN 3

RATIONALE GETALLEN IN BREUKVORM

Een rationaal getal is een breuk van twee gehele getallen, dus element van

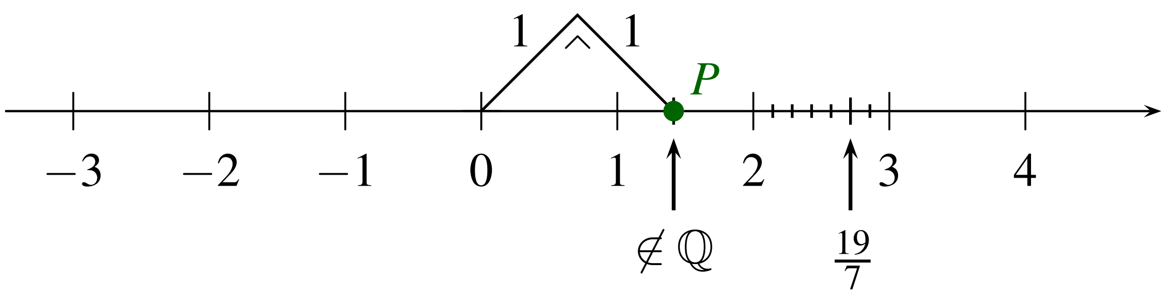
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ en } b \neq 0 \right\}.$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Een rationaal getal voorstellen op de getallenas doe je door de breuk te schrijven als de som van een geheel getal en een echte breuk: een breuk met absolute waarde teller kleiner dan absolute waarde noemer.

Voorbeeld. Om $\dfrac{19}{7}$ op een getallenas voor te stellen: schrijf $\dfrac{19}{7} = 2 + \dfrac{5}{7}$ en verdeel het lijnstuk bepaald door 2 en 3 in zeven gelijke delen.



Bij elk rationaal getal hoort een punt van de getallenas, maar niet omgekeerd. Zo hoort bij bovenstaand punt P geen rationaal getal.

GETALLEN 4

RATIONALE GETALLEN IN DECIMALE VORM

Met behulp van de notatie

$$\frac{1}{10} = 0,1 \qquad \frac{1}{100} = 0,01 \qquad \frac{1}{1000} = 0,001 \qquad \text{enzovoort}$$

kunnen we elk rationaal getal in *decimale vorm* schrijven. Dat proces kun je ook uitvoeren met het schema van de staartdeling. Na de gehele deling is de rest kleiner dan de deler b. Zetten we de staartdeling verder, dan zal na hoogstens $b-1$ stappen een eerdere rest verschijnen:

elk rationaal getal heeft een repeterende decimale vorm

De kortste herhaling van cijfers wordt de periode van die vorm genoemd.

Omgekeerd hoort bij elke repeterende decimale vorm een rationaal getal.

Voorbeelden

(a) $\frac{9}{4} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2,25$

(b) $\frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000} + \cdots = 0,333\ldots = 0,\overline{3}$

(c) $-\frac{127}{55} = -2,309\,090\,909\ldots = -2,3\overline{09}$ heeft periode 09.

(d) $\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,1\ldots = 0,\overline{142857}$ heeft periode 142 857.

(e) $\frac{9}{4} = 2,250\,00\ldots = 2,25\overline{0} = 2,25$ heeft periode 0.

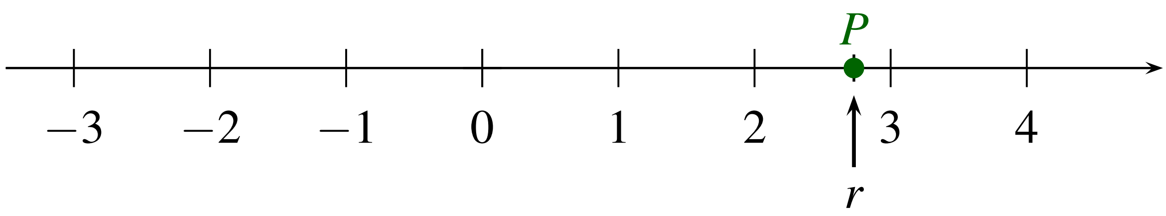
(f) Als $q = 3,2\overline{17}$ dan is $1000q - 10q = 3217,\overline{17} - 32,\overline{17} = 3185$

dus $q = \frac{3185}{990} = \frac{637}{198}$.

GETALLEN 5

REËLE GETALLEN

Bij elk punt P op de getallenas hoort precies één *reëel getal* r en omgekeerd hoort bij elk reëel getal r precies één punt P op de getallenas.



Door elk lijnstuk tussen twee opeenvolgende gehele getallen in tien, honderd, duizend... gelijke delen te verdelen (decimeren), kan elk reëel getal voorgesteld worden als decimale vorm

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

waarbij $a_0 \in \mathbb{Z}$ en a_1, a_2, a_3, a_4 etc. cijfers zijn, decimalen genoemd.

Anders gezegd: een reëel getal is een element van de verzameling van alle decimale vormen:

$$\mathbb{R} = \{a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \mid a_0 \in \mathbb{Z} \text{ en } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ etc. zijn cijfers}\}.$$

Een niet-eindigende voortzetting van decimaal 0 laten we meestal weg. Zo'n reëel getal heeft twee verschillende decimale vormen.

Voorbeelden

(a) $\dfrac{1}{2} = 0,50000\dots = 0,5$

(b) $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

(c) $\pi = 3,1415926535 8\dots$

(d) $1 = 1,00000\dots$ en $1 = 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 3 \cdot 0,33333\dots = 0,99999\dots$

GETALLEN 6

IRRATIONALE GETALLEN

Een rationaal getal is een breuk van twee gehele getallen, en

$$\boxed{\text{elk rationaal getal heeft een repeterende decimale vorm}}$$

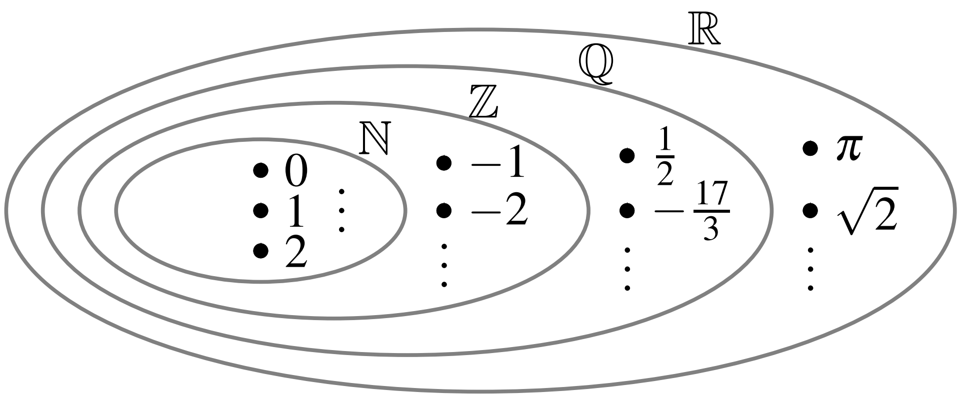
Een reëel getal behoort tot de verzameling van alle decimale vormen:

$$\mathbb{R} = \{a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots \mid a_0 \in \mathbb{Z} \text{ en } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ etc. zijn cijfers}\}.$$

Een irrationaal getal is een reëel getal dat geen rationaal getal is:

$$\boxed{\text{elk irrationaal getal heeft een niet-repeterende decimale vorm}}$$

Voorstelling met venndiagrammen:



Voorbeelden

(a) $C_{10} = 0{,}123456789101112\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(b) $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(c) $\dfrac{665\,857}{470\,832} = 1{,}41421356\ldots \in \mathbb{Q}$

(d) $\pi = 3{,}1415926535 8\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

De reële getallen (a) de constante van Champerowne, (b) de positieve vierkantswortel van twee, (c) een rationale benad. van $\sqrt{2}$ en (d) de cirkelconstante pi.

GETALLEN 7

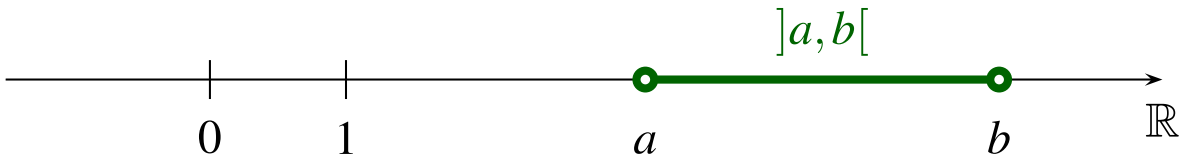
BEGRENSDE INTERVALLEN

Een interval is een bijzondere deelverzameling van $\mathbb{R}$. Door reële getallen voor te stellen op de getallenas, kunnen we ook intervallen visualiseren.

Hieronder beschrijven we de begrensde intervallen ($a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$).

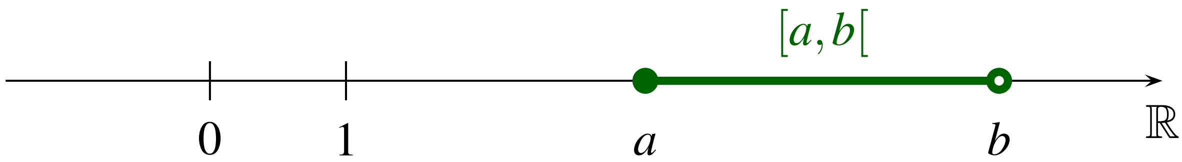
Open interval $]a,b[$ is de verzameling van alle reële getallen tussen a en b:

$$\boxed{]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}$$



Halfopen interval $[a,b[$ is de verzameling van alle reële getallen tussen a en b, met a erbij:

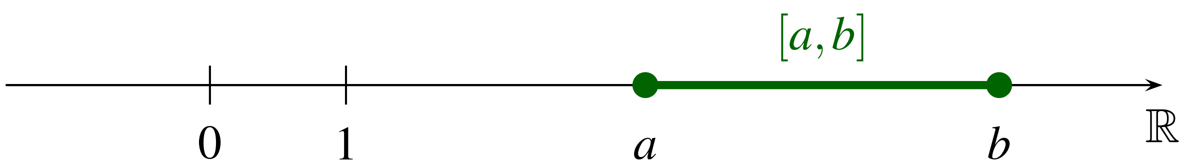
$$\boxed{[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}$$



De omschrijving voor het halfopen interval $]a,b]$ is analoog.

Gesloten interval $[a,b]$ is de verzameling van alle reële getallen tussen a en b, met a en b erbij:

$$\boxed{[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}$$



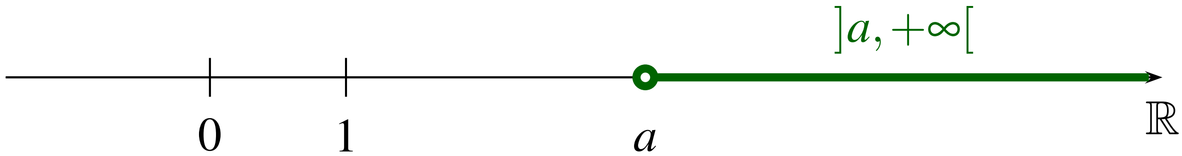
GETALLEN 8

ONBEGRENSDE INTERVALLEN

Om ook onbegrensde intervallen te noteren, gebruiken we de symbolen $+\infty$ en $-\infty$, lees als *plus oneindig* en *min oneindig*. Die symbolen zijn geen getallen. Voor elk reëel getal a spreken we af dat $-\infty < a < +\infty$.

Open interval $]a,+\infty[$ is de verzameling van reële getallen groter dan a:

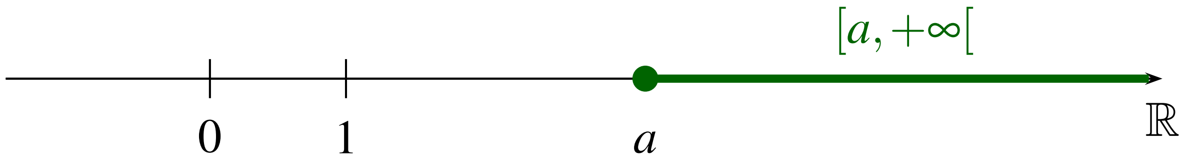
$$\boxed{\,]a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}}$$



De omschrijving voor het open interval $]-\infty,a[$ is analoog.

Halfopen interval $[a,+\infty[$ is de verzameling van alle reële getallen groter dan of gelijk aan a:

$$\boxed{[a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}}$$



De omschrijving voor het halfopen interval $]-\infty,a]$ is analoog.

Voor $a = 0$ worden deze onbegrensde intervallen ook als volgt genoteerd:

$$\boxed{[0,+\infty[\, = \mathbb{R}^+ \quad]0,+\infty[\, = \mathbb{R}_0^+ \quad]-\infty,0] = \mathbb{R}^- \quad]-\infty,0[\, = \mathbb{R}_0^-}$$

Het open interval $]-\infty,+\infty[$ is de verzameling van alle reële getallen:

$$\boxed{\,]-\infty,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}}$$

GETALLEN 9

EXACTE WAARDE

Een decimale vorm van een reëel getal r kan nooit helemaal opgeschreven worden:

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Als na het laatst opgeschreven cijfer niet duidelijk is wat de volgende decimalen zijn, noemen we de decimale vorm geen exacte waarde.

Soms kunnen we duidelijk maken wat de volgende decimalen zijn of hoe die gevonden kunnen worden, bijvoorbeeld door een gegeven patroon in de decimalen te communiceren, een bewerking te geven of gekende symbolen te gebruiken. In dat geval spreken we van een exacte waarde.

Voorbeelden

(a) $2,292\,29\ldots$ is geen exacte waarde

(b) $2,2\overline{922}$ is een exacte waarde

(c) $\dfrac{11-\sqrt{17}}{3}$ is een exacte waarde, met decimale vorm $2,292\,29\ldots$

(d) $0,5$ is een exacte waarde

(e) $0,500\ldots$ is geen exacte waarde

(f) π is een exacte waarde

(g) $3,14\ldots$ is geen exacte waarde

(h) $\dfrac{22}{7}$ is een exacte waarde

(i) $3,14$ is een exacte waarde

GETALLEN 10

AFGERONDE WAARDE

Een decimale vorm van een reëel getal r kan nooit helemaal opgeschreven worden:

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Als we slechts een eindig aantal decimalen behouden en beletselteken "…" weglaten, spreken we over een afgeronde waarde:

- ▷ is de eerste decimaal die weggelaten wordt 0, 1, 2, 3 of 4, dan wijzigen we het laatst opgeschreven decimaal niet;
- ▷ is de eerste decimaal die weggelaten wordt 5, 6, 7, 8 of 9, dan tellen we bij het laatst opgeschreven decimaal 1 op.

Om aan te geven dat we afgerond hebben, vervangen we het symbool $=$ door $\approx$, lees als: *is ongeveer gelijk aan.*

Is er een exacte waarde, dan kan een rekenmachine een afgeronde waarde geven. Daarbij kan de laatste decimaal op het scherm zelf afgerond zijn.

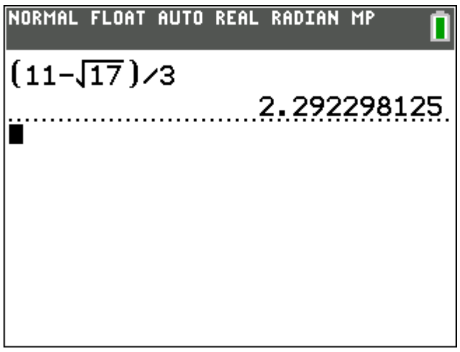
Voorbeelden

(a) $\dfrac{1}{8} = 0,125 \approx 0,13$

(b) $\pi \approx 3,14$

(c) $\dfrac{11-\sqrt{17}}{3} \approx 2,292\,298\,125$

(d) $\dfrac{11-\sqrt{17}}{3} = 2,292\,298\,12\ldots$



(c) Gebruiken we een computerrekenpakket, dan vinden we een meer nauwkeurige afgeronde waarde: $\frac{11-\sqrt{17}}{3} \approx 2,292\,298\,124\,794\,11$ zodat wel degelijk $\frac{11-\sqrt{17}}{3} \neq 2,292\,298\,125\ldots$

GETALLEN 11

WETENSCHAPPELIJKE NOTATIE

Sommige getallen zijn zo groot of hebben zoveel decimalen dat het onhandig wordt om hen in decimale vorm op te schrijven, bijvoorbeeld

$$5\,720\,467\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \quad \text{en} \quad 0{,}000\,000\,0061.$$

Voor zo'n getallen kunnen we de wetenschappelijke notatie gebruiken:

$$5{,}720\,467 \cdot 10^{24} \quad \text{en} \quad 6{,}1 \cdot 10^{-9}.$$

Algemeen is een wetenschappelijke notatie van de vorm

$$\boxed{a \cdot 10^{m} \quad \text{met } a \in \mathbb{R} \text{ en } m \in \mathbb{Z}}$$

We noemen a de significant en m de exponent. Als $1 \leq |a| < 10$, dan spreken we over de genormaliseerde wetenschappelijke vorm.

Rekenmachines en computers gebruiken vaak de E-notatie. Dat symbool `E` lees je als *maal tien tot de macht*.

Voorbeelden

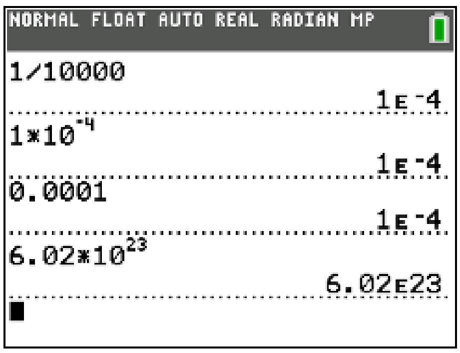
(a) $-60\,000 = -6 \cdot 10^{4}$

(b) $0{,}031 = 3{,}1 \cdot 10^{-2}$

(c) $13\,000\,000 = 13 \cdot 10^{6} = 1{,}3 \cdot 10^{7}$

(d) $\dfrac{1}{10\,000} = \texttt{1E-4} = 1 \cdot 10^{-4} = 0{,}0001 \approx 0$

(e) $\texttt{6,02E23} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$



VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Bewerkingen met twee getallen

symbool	lees als	voorbeeld
$+$	plus	$1+1=2$
$-$	min	$7-2=5$
$\cdot$	maal	$2\cdot 3=6$
$\div$	gedeeld door	$\frac{6}{3}=2$
$\pm$	plus of min	$0\pm 1=\pm 1$
$\mp$	min of plus	$-(\mp 3)=\pm 3$
ggd	de grootste positieve gemene deler	$\text{ggd}(-12,18)=6$
kgv	het kleinste positieve gemene veelvoud	$\text{kgv}(-12,18)=36$

Bewerkingen met meerdere getallen

symbool	lees als	voorbeeld
$\sum_{i=1}^{n}\square$	de som voor i gaande van 1 tot n van telkens $\square$	$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$

BEWERKINGEN MET GETALLEN

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Bewerkingen met een getal $\square$		
symbool	lees als, voorwaarde	voorbeeld
$-\square$	het tegengestelde van $\square$	$-(-3) = 3$
$\lvert\square\rvert$	de absolute waarde van $\square$	$\lvert-5\rvert = 5$
$\dfrac{1}{\square}$	het omgekeerde van $\square$ met $\square \neq 0$	$\dfrac{1}{2} = 0,5$
$\square^{-1}$	het omgekeerde van $\square$ met $\square \neq 0$	$2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0,5$
$\square^2$	het kwadraat van $\square$	$3^2 = 9$
$\square^3$	de derde macht van $\square$	$2^3 = 8$
$\sqrt{\square}$	de positieve vierkantswortel van $\square$ met $\square \geq 0$	$\sqrt{4} = 2$
$-\sqrt{\square}$	de negatieve vierkantswortel van $\square$ met $\square \geq 0$	$-\sqrt{4} = -2$
$\sqrt[3]{\square}$	de derdemachtswortel van $\square$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\square!$	de faculteit van $\square$ met $\square \in \mathbb{N}_0$	$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 1

SOMMEN EN PRODUCTEN

Rekenregels voor optelling ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$a + b = b + a$	commutatief
$(a+b)+c = a+(b+c)$	associatief
$a + 0 = a$	neutraal element
$a + (-a) = 0$	invers element

Veelvoud van een getal ($n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$):

$$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ keer}}$$

Rekenregels voor vermenigvuldiging ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$a \cdot b = b \cdot a$	commutatief
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	associatief
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	distributief t.o.v. optelling
$1 \cdot a = a$	neutraal element
$0 \cdot a = 0$	opslorpend element

Uitwerken van haakjes doe je door rekenregels toe te passen.

Voorbeelden

(a) $7x + 2(3x+5) = 7x + 6x + 10 = 13x + 10$

(b) $(2a+b)(c+3d) = 2a(c+3d) + b(c+3d) = 2ac + 6ad + bc + 3bd$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 2

BREUKEN

Breuken zijn gelijk als en slechts als hun kruisproducten gelijk zijn:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad=bc}$$

Breuk plus breuk: gelijknamig maken

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \text{en} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

Breuk of getal maal breuk: teller maal teller, noemer maal noemer

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \text{en} \qquad a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}}$$

Omgekeerde van breuk: teller en noemer verwisselen

$$\boxed{\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1\cdot b}{\frac{a}{b}\cdot b}=\frac{b}{a}}$$

Breuk gedeeld door breuk: breuk maal omgekeerde breuk

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$$

Voorbeelden

(a) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{6}{15}+\dfrac{40}{15}=\dfrac{46}{15}$

(b) $\dfrac{6}{5x}\cdot\dfrac{3x}{8}=\dfrac{18x}{40x}=\dfrac{9\cdot 2x}{20\cdot 2x}\overset{(*)}{=}\dfrac{9}{20}$

Bij elke breuk wordt verondersteld dat de noemer verschillend is van nul.
$(*)$ Zeg niet *schrappen* maar wel *teller en noemer delen door* $2x$.

BEWERKINGEN MET GETALLEN 3

TEKENREGELS

Tekenregels voor som, verschil en product:

$a+(-b)=a-b$	$(-1)\cdot a=-a$
$-(a+b)=-a-b$	$(-1)\cdot a\cdot b=-a\cdot b$
$-(a-b)=-a+b$	$(-a)\cdot b=-a\cdot b$
$-(-a+b)=a-b$	$a\cdot(-b)=-a\cdot b$
$-(-a-b)=a+b$	$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

Tegengestelde breuk: tegengestelde teller ofwel tegengestelde noemer

$$\boxed{-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}}$$

Uitwerken van haakjes doe je door rekenregels toe te passen.

Voorbeelden

(a) $34-(-16)=34+16=50$

(b) $(-12)\cdot 5=-12\cdot 5=-60$

(c) $-(-p-q+r)=p+q-r$

(d) $7x-2(3x+5)=7x-6x-10=x-10$

(e) $7x-2(3x-5)=7x-6x+10=x+10$

(f) $\frac{2}{5}-\frac{8}{3}=\frac{6}{15}-\frac{40}{15}=\frac{-34}{15}=-\frac{34}{15}$

(g) $\frac{6}{5x}\cdot\left(-\frac{3x}{8}\right)=\frac{6}{5x}\cdot\frac{-3x}{8}=\frac{-18x}{40x}=-\frac{18x}{40x}=-\frac{9}{20}$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 4

VEREENVOUDIGEN VAN BREUKEN

Stappenplan vereenvoudigen van een breuk:

Stap 1. Eventuele breuken in teller en noemer wegwerken:
Teller en noemer vermengvuldigen met hetzelfde getal

Stap 2. Teller en noemer ontbinden in factoren

Stap 3. Gemeenschappelijke factoren wegdelen

Voorbeelden

(a) $$\frac{\frac{5}{3}-6}{7-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3}-6}{7-\frac{1}{2}} \cdot \frac{6}{6} = \frac{10-36}{42-3} = \frac{-26}{39} = -\frac{2\cdot 13}{3\cdot 13} \overset{(*)}{=} -\frac{2}{3}$$

(b) $$\frac{x+y}{\frac{x}{y}+1} = \frac{x+y}{\frac{x}{y}+1} \cdot \frac{y}{y} = \frac{(x+y)y}{x+y} = y$$

In het algemeen is

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \qquad \frac{ab}{ac+1} \neq \frac{b}{c+1}$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}} \neq \frac{b}{a} + \frac{d}{c} \qquad \frac{ab+1}{ac} \neq \frac{b+1}{c}$$

Voorbeelden

$$\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \neq \frac{2}{1} + \frac{2}{1}, \quad \frac{2}{2+1} \neq \frac{1}{1+1}, \quad \frac{2+1}{2} \neq \frac{1+1}{1}$$

(∗) Zeg niet *schrappen* maar wel *teller en noemer delen door* 13.

BEWERKINGEN MET GETALLEN 5

CIJFEREN

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen zonder rekenmachine kan volgens de methodes die je in de lagere school hebt gezien.

Voorbeeld 1. De som $3548 + 12\,931 = 16\,479$.

$$
\begin{array}{rr}
 & 3\,548 \\
 & 12\,931 \\
\hline
+ & \cdots\cdot 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 3\,548 \\
 & 12\,931 \\
\hline
+ & \cdots 79
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 3\,548 \\
 & 12\,931 \\
\hline
+ & \cdot\cdot\, 479
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 3\,548 \\
 & 12\,931 \\
\hline
+ & \cdot 6\,479
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 3\,548 \\
 & 12\,931 \\
\hline
+ & 16\,479
\end{array}
$$

Voorbeeld 2. Het verschil $8197 - 3305 = 4892$.

$$
\begin{array}{rr}
 & 8\,197 \\
 & 3\,305 \\
\hline
- & \cdots 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 8\,197 \\
 & 3\,305 \\
\hline
- & \cdot\cdot\, 92
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 7\;10} \\
 & \cancel{8}\,197 \\
 & 3\,305 \\
\hline
- & \cdot\cdot\, 92
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 7\;10} \\
 & \cancel{8}\,197 \\
 & 3\,305 \\
\hline
- & \cdot 892
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 7\;10} \\
 & \cancel{8}\,197 \\
 & 3\,305 \\
\hline
- & 4\,892
\end{array}
$$

Voorbeeld 3. Het product $731 \times 42 = 30\,702$.

$$
\begin{array}{rr}
 & 731 \\
 & 2 \\
\hline
\times & 1\,462
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 731 \\
 & 40 \\
\hline
\times & \\
 & 29\,240
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 731 \\
 & 42 \\
\hline
\times & 1\,462 \\
 & 29\,240 \\
\hline
+ & \cdots\cdot\cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 1} \\
 & 731 \\
 & 42 \\
\hline
\times & 1\,462 \\
 & 29\,240 \\
\hline
+ & 30\,702
\end{array}
$$

Voorbeeld 4. Het cijferen hierboven leidt nu ook tot de berekening

$$73,1 \times 0,42 = \frac{731}{10} \cdot \frac{42}{100} = \frac{731 \cdot 42}{10 \cdot 100} = \frac{30\,702}{1000} = 30,702.$$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 6

STAARTDELING

Een deling uitvoeren kan met het schema van de staartdeling.

Dat schema kun je ook gebruiken om een rationaal getal in decimale vorm te schrijven. Bij elke stap is de (voorlopige) rest telkens kleiner dan de deler b, zodat na hoogstens $b-1$ stappen een eerdere rest verschijnt:

> elk rationaal getal heeft een repeterende decimale vorm

Voorbeeld 1. De deling $41\,717 : 13 = 3209$.

$$
\begin{array}{r|l}
41\,717 & 13 \\ \hline
-\ \underline{39} & 3 \\
2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
41\,717 & 13 \\ \hline
-\ \underline{39} & 32 \\
27 & \\
-\ \underline{26} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
41\,717 & 13 \\ \hline
-\ \underline{39} & 320 \\
27 & \\
-\ \underline{26} & \\
11 & \\
-\ \underline{0} & \\
11 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
41\,717 & 13 \\ \hline
-\ \underline{39} & 3209 \\
27 & \\
-\ \underline{26} & \\
11 & \\
-\ \underline{0} & \\
117 & \\
-\ \underline{117} & \\
0 &
\end{array}
$$

Voorbeeld 2. Het rationaal getal $\dfrac{127}{55} = 2,309\,090\,909\ldots = 2,3\overline{09}$.

$$
\begin{array}{r|l}
127,000 & 55 \\ \hline
-\ \underline{110} & 2,309 \\
170 & \\
-\ \underline{165} & \\
\mathbf{5}0 & \\
-\ \underline{0} & \\
500 & \\
-\ \underline{495} & \\
\mathbf{5} &
\end{array}
$$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 7

KENMERKEN VAN DEELBAARHEID

Om na te gaan of een geheel getal deelbaar is door 2, 3, 5, 9, 10 of 11, kun je de volgende kenmerken van deelbaarheid gebruiken ($a \in \mathbb{Z}_0$):

$2 \mid a$	als het laatste cijfer even is
$3 \mid a$	als de som van de cijfers een veelvoud van 3 is
$5 \mid a$	als het laatste cijfer 0 of 5 is
$9 \mid a$	als de som van de cijfers een veelvoud van 9 is
$10 \mid a$	als het laatste cijfer 0 is
$11 \mid a$	als de alternerende som van de cijfers een veelvoud van 11 is

Voor een kenmerk van deelbaarheid door 7 noemen we L het laatste cijfer van a:

$$\boxed{7 \mid a \quad \text{als het getal } \frac{a-L}{10} - 2L \text{ een veelvoud van 7 is}}$$

Voorbeelden

(a) $3 \mid 882$ want $8+8+2 = 18$ en $3 \mid 18$

(b) $9 \nmid 82\,731$ want $8+2+7+3+1 = 21$ en $9 \nmid 21$

(c) $11 \mid 2024$ want $2-0+2-4 = 0$ en $11 \mid 0$

(d) $11 \nmid 99\,909$ want $9-9+9-0+9 = 18$ en $11 \nmid 18$

(e) $7 \mid 3689$ want $\dfrac{3689-9}{10} - 2 \cdot 9 = 350$ en $7 \mid 350$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 8

ONTBINDEN IN PRIEMFACTOREN

Om een geheel getal $a \neq 0$ te ontbinden in priemfactoren, overlopen we de positieve priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11 etc. tot we een deler van a vinden. Daarna herhalen we dit proces met het quotiënt, etc.

Nagaan of een geheel getal deelbaar is door een priemgetal kan met kenmerken van deelbaarheid of met het schema van de staartdeling. Je kan ook gebruik maken van de lijst van priemgetallen op pagina 134.

Zijn $a, b \in \mathbb{Z}_0$, dan noteren we hun grootste positieve gemene deler als $\text{ggd}(a,b)$ en hun kleinste positieve gemene veelvoud als $\text{kgv}(a,b)$. Als $\text{ggd}(a,b) = 1$, dan worden a en b onderling ondeelbaar genoemd.

Ggd en kgv kun je bepalen door a en b te ontbinden in priemfactoren en de kleinste resp. grootste exponenten van gelijke priemfactoren te behouden. Bijgevolg is

$$\boxed{\text{ggd}(a,b) \cdot \text{kgv}(a,b) = a \cdot b}$$

Voorbeelden

(a) $918 = 2 \cdot 3^3 \cdot 17$

schema: $\begin{array}{r|l} 918 & 2 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$

(b) $2541 = 3 \cdot 7 \cdot 11^2$

schema: $\begin{array}{r|l} 2541 & 3 \\ 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$

(c) $-776 = -2^3 \cdot 97$

schema: $\begin{array}{r|l} -776 & 2 \\ -388 & 2 \\ -194 & 2 \\ -97 & 97 \\ -1 & \end{array}$

(d) $\text{ggd}(-18, 24) = \text{ggd}(-2^{\mathbf{1}} \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^{\mathbf{1}}) = 2^1 \cdot 3^1 = 6$

$\text{kgv}(-18, 24) = \text{kgv}(-2^1 \cdot 3^{\mathbf{2}}, 2^{\mathbf{3}} \cdot 3^1) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

(e) $\text{ggd}(105, 75) = \text{ggd}(3^{\mathbf{1}} \cdot 5^{\mathbf{1}} \cdot 7^1, 3^{\mathbf{1}} \cdot 5^2 \cdot 7^{\mathbf{0}}) = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15$

$\text{kgv}(105, 75) = \text{kgv}(3^{\mathbf{1}} \cdot 5^1 \cdot 7^{\mathbf{1}}, 3^{\mathbf{1}} \cdot 5^{\mathbf{2}} \cdot 7^0) = 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 525$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 9

PROCENTEN

Om van een getal A een percentage p te nemen, ga je als volgt te werk:

$$p\% \text{ van } A \text{ is } \quad \frac{p}{100}\cdot A$$

Om bij een getal A een percentage p van dat getal op te tellen of af te trekken, vinden we dus:

$$A \text{ plus } p\% \text{ van } A \text{ is } \quad A+\frac{p}{100}\cdot A = A\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$A \text{ min } p\% \text{ van } A \text{ is } \quad A-\frac{p}{100}\cdot A = A\left(1-\frac{p}{100}\right)$$

Voorbeelden

(a) 16% van 1400 is $\frac{16}{100}\cdot 1400 = 16\cdot 14 = 224$

(b) 120 vermeerderd met 15% is $120\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right) = 120\cdot 1,15 = 138$

(c) 120 verminderd met 15% is $120\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right) = 120\cdot 0,85 = 102$

(d) Eerst 120 vermeerderen met 15%, en daarna dat getal nog eens vermeerderen met 15% is uiteindelijk

$$120\cdot 1,15\cdot 1,15 = 120\cdot 1,15^2 = 158,7\%.$$

(e) Eerst 100 verminderen met 20%, en daarna dat getal vermeerderen met 20% is uiteindelijk

$$100\cdot 0,80\cdot 1,20 = 80\cdot 1,20 = 96.$$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 10

MACHTEN

Machten met grondtal a en exponent n of $-n$ ($a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$):

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ keer}} \qquad \text{met } n \neq 0$$

$$a^0 = 1 \qquad \text{met } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{met } a \neq 0$$

Rekenregels voor machten ($a, b \in \mathbb{R}_0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Voorbeelden

(a) $\dfrac{8x^3}{10x^5 - 6x^2} = \dfrac{8x^3}{10x^2 \cdot x^3 - 6x^2} = \dfrac{8x^3}{2x^2\,(5x^3 - 3)} = \dfrac{4x}{5x^3 - 3}$

(b) $\dfrac{\left(5p^3q\right)^2 \cdot 3pq^5}{6p^9} = \dfrac{25p^6q^2 \cdot 3p^1q^5}{6p^9} = \dfrac{75}{6}\,p^{6+1-9}q^{2+5} = \dfrac{25q^7}{2p^2}$

De uitdrukking 0^0 is een zogenaamde *onbepaaldheid* (leerstof derde graad).

BEWERKINGEN MET GETALLEN 11

ABSOLUTE WAARDE

Is $x \in \mathbb{R}$ met punt P op getallenas, dan is de absolute waarde van x:

$$\boxed{|x| = \text{ de afstand tussen de punten } P \text{ en } O \text{ op de getallenas}}$$

Als $x \geq 0$ dan is de afstand van P tot O precies gelijk aan x, en als $x < 0$ dan is de afstand van P tot O precies gelijk aan $-x$.

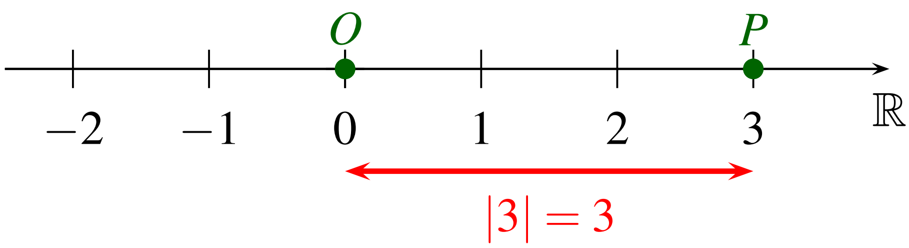
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}}$$

Is ook y een reëel getal met bijbehorend punt Q op de getallenas, dan is

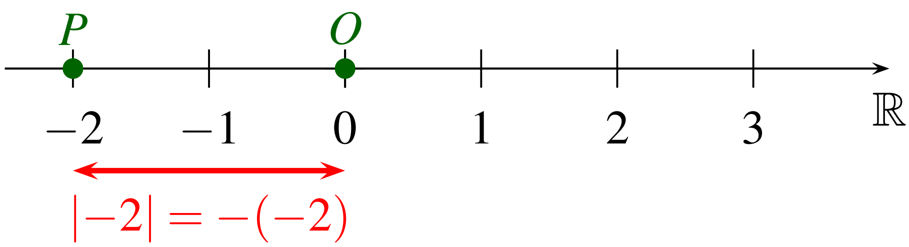
$$\boxed{|x-y| = \text{ de afstand tussen de punten } P \text{ en } Q \text{ op de getallenas}}$$

Voorbeelden

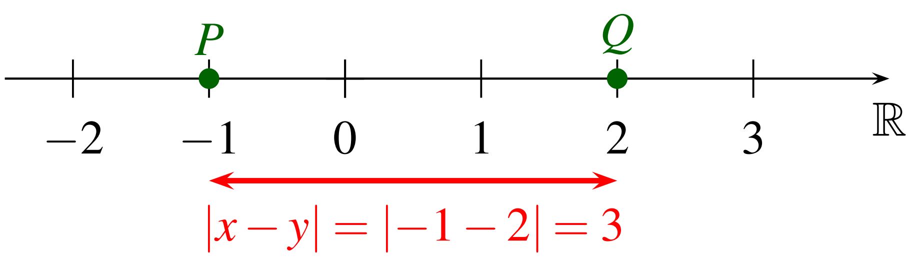
(a)



(b)



(c)



BEWERKINGEN MET GETALLEN 12

VIERKANTSWORTELS

De positieve vierkantswortel van $a \in \mathbb{R}^+$ is het positief reëel getal b waarvan het kwadraat gelijk is aan a. Dat getal noteren we met $\sqrt{a}$, lees als: *de positieve vierkantswortel van a.*

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^2 \quad \text{en} \quad b \geq 0}$$

Het tegengestelde van de positieve vierkantwortel van a is gelijk aan $-\sqrt{a}$, lees als: *de negatieve vierkantswortel van a.* Elk positief getal heeft dus twee vierkantwortels. De notatie $\sqrt{a}$ is enkel zinvol als $a \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{a}} \quad \text{zodat} \quad \boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Rekenregels voor vierkantswortels ($a, b, c \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(\sqrt{a}\right)^2 = a & \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n & \sqrt{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \end{array}}$$

In het algemeen is

$$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Voorbeelden

(a) $\sqrt{16} = 4 \quad \text{want} \quad 16 = 4^2 \quad \text{en} \quad 4 \geq 0$

(b) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} = 4$ of $x = -\sqrt{16} = -4$

(c) $\sqrt{-16} = /$ (bestaat niet, niet zinvol)

(d) $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} \quad \text{want} \quad 5 \neq 3 + 4$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 13

VEREENVOUDIGEN VAN VIERKANTSWORTELS

Stappenplan vereenvoudigen van vierkantswortels:

> **Stap 1.** Het grootste kwadraat afzonderen
>
> Bij grotere getallen ontbind je eerst in (priem)factoren
>
> **Stap 2.** Pas de rekenregels voor vierkantswortels toe

Je kan ook gebruik maken van de lijst van kwadraten op pagina 135.

Voorbeelden

(a) $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{3136} = \sqrt{2^6 \cdot 7^2} = 2^3 \cdot 7 = 56$

(c) $\sqrt{196} = \sqrt{14^2} = 14$ en $\sqrt{-196} = /$ (bestaat niet, niet zinvol)

(d) $\sqrt{12} - \sqrt{192} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^6 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3} - 2^3 \cdot \sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

(e) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{8 \cdot 6} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(f) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{675}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3^3 \cdot 5^2}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{15\sqrt{3}} = \dfrac{2}{5}$

(g) Als $x \in \mathbb{R}^+$ dan is $\sqrt{x^2} = x$.

(h) Als $a, b \in \mathbb{R}^+$ dan is $\sqrt{a^9 b^3} = \sqrt{a^8 b^2} \cdot \sqrt{ab} = a^4 b \sqrt{ab}$.

(i) Als $x \in \mathbb{R}$ dan is $\sqrt{x^2} = |x|$ en $\sqrt{x^4} = \left|x^2\right| = x^2$.

BEWERKINGEN MET GETALLEN 14

NOEMER WORTELVRIJ MAKEN

Bij een breuk waarvan de noemer een vierkantswortel is, kun je die wortel verdrijven door de teller en noemer met de noemer te vermenigvuldigen:

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

Ook als de noemer bestaat uit twee termen die één of meerdere vierkantswortels bevatten, kun je de noemer wortelvrij maken door de teller en noemer met de toegevoegde tweeterm van de noemer te vermenigvuldigen:

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a}{\sqrt{b}+c} \cdot \frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c} = \frac{a\left(\sqrt{b}-c\right)}{b-c^2}}$$

Een noemer wortelvrij maken hoef je alleen te doen als dat expliciet gevraagd wordt. Dat is ook zinvol als de nieuwe uitdrukking beduidend eenvoudiger is dan de opgave.

Voorbeelden

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (eenvoudiger)

(b) $-\dfrac{3}{5\sqrt{7}} = -\dfrac{3}{5\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -\dfrac{3\cdot\sqrt{7}}{5\cdot 7} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{35}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$ (eenvoudiger)

(d) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{13}} = \dfrac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}\right)}{7-13} = \dfrac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}\right)}{-6} = -\dfrac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}\right)}{3}$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 15

DERDEMACHTSWORTELS

De derdemachtswortel van $a \in \mathbb{R}$ is het reëel getal b waarvan de derde macht gelijk is aan a. Dat getal noteren we met $\sqrt[3]{a}$, lees als: *de derdemachtswortel van a.*

$$\boxed{\sqrt[3]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^3}$$

Elk reëel getal heeft dus één derdemachtswortel.

$$\boxed{x^3 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{a}} \qquad \text{zodat} \qquad \boxed{\sqrt[3]{x^3} = x}$$

Rekenregels voor derdemachtswortels ($a, b, c \in \mathbb{R}$ met $c \neq 0$ en $n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 &= a \\ \sqrt[3]{a \cdot b} &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{\frac{a}{c}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{c}} \\ \sqrt[3]{a^n} &= \left(\sqrt[3]{a}\right)^n \\ \sqrt[3]{-a} &= -\sqrt[3]{a} \end{aligned}}$$

In het algemeen is

$$\boxed{\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

Voorbeelden

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$ want $8 = 2^3$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $-8 = (-2)^3$

(b) $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

(c) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

(d) $\sqrt[3]{1+1} \neq \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$ want $\sqrt[3]{2} \neq 2$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 16

VEREENVOUDIGEN VAN DERDEMACHTSWORTELS

Stappenplan vereenvoudigen van derdemachtswortels:

> **Stap 1.** De grootste derde macht afzonderen
>
> Bij grotere getallen ontbind je eerst in (priem)factoren
>
> **Stap 2.** Pas de rekenregels voor derdemachtswortels toe

Je kan ook gebruik maken van de lijst van derde machten op pagina 135.

Voorbeelden

(a) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

(b) $\sqrt[3]{-135} = -\sqrt[3]{135} = -\sqrt{3^3 \cdot 5} = -\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$

(c) $\sqrt[3]{384} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2^1 \cdot 3} = \sqrt[3]{(2^2)^3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$

(d) $\sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{2}$

(e) $\sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{10^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 10 \cdot \sqrt[3]{2}$

(f) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12$

(g) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$

(h) Als $x \in \mathbb{R}$, dan is $\sqrt[3]{x^3} = x$.

(i) Voor $a, b \in \mathbb{R}$ is

$$\sqrt[3]{a^{15}b^8} = \sqrt[3]{a^{15} \cdot b^6 \cdot b^2} = \sqrt[3]{\left(a^5b^2\right)^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} = a^5b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2}.$$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 17

MERKWAARDIGE PRODUCTEN: KWADRATEN

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ stellen we vast dat

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

De term $2ab$ noemen we dubbel product. Op deze manier vinden we

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadraat van een som
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	kwadraat van een verschil
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	product van twee toegevoegde termen

Voorbeelden

(a) $98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996$

(b) $$\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{9}{25} - \frac{4}{9} = \frac{81}{225} - \frac{100}{225} = -\frac{19}{225}$$

(c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

(d) $(-3x+5)^2 = (5-3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

(e) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{4}x^2 - 9$

Het bijvoegelijk naamwoord *merkwaardig* betekent in deze context niet zozeer *eigenaardig*, maar wel *noemenswaardig* of *het opmerken waard*.

MERKWAARDIGE PRODUCTEN: DERDE MACHTEN

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ stellen we vast dat

$$\begin{aligned}(a+b)^2(a+b) &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Op deze manier vinden we

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	derde macht van een som
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	derde macht van een verschil

Voorbeelden

(a) $$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{5}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\\ &= 5+3\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+2\\ &= 7+3\left(\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}\right)\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}x-2\right)^3 &= \left(\frac{4}{3}x\right)^3-3\cdot\left(\frac{4}{3}x\right)^2\cdot 2+3\cdot\frac{4}{3}x\cdot 2^2-2^3\\ &= \frac{64}{27}x^3-6\cdot\frac{16}{9}x^2+3\cdot\frac{4}{3}\cdot 4x-8\\ &= \frac{64}{27}x^3-\frac{32}{3}x^2+16x-8\end{aligned}$$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 19

SOMMATIETEKEN

Een som waarbij de termen een patroon vertonen, kun je beknopt opschrijven met behulp van het sommatieteken Σ, zoals

$\sum_{i=1}^{n} \square$	lees als: de som voor i gaande van 1 tot n van telkens $\square$

Hierbij staat $\square$ voor een uitdrukking met getallen en bewerkingen, waarin ook de variabele i voorkomt. De letter n stelt een natuurlijk getal voor dat groter is dan nul.

De bedoeling is dan dat je eerst $\square$ opschrijft met $i = 1$ (startgetal) ingevuld, en dit optelt met $\square$ waarbij $i = 2$ is ingevuld, etc. Je eindigt met het optellen van $\square$ waarbij $i = n$ (stopgetal) is ingevuld.

De variabele i wordt ook wel de sommatie-index genoemd. De naam van die variabele is onbelangrijk, je kan dus ook een andere letter gebruiken.

Je kan als startgetal ook een geheel getal verschillend van 1 nemen, op voorwaarde dat het startgetal kleiner dan of gelijk aan het stopgetal n is.

Voorbeelden

(a) $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

(b) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{248}{315}$

(c) $2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = \sum_{i=1}^{10} 2^i = \sum_{k=1}^{10} 2^k$

(d) $\sum_{k=51}^{1000} a_k = a_{51} + a_{52} + a_{53} + \cdots + a_{1000}$

BEWERKINGEN MET GETALLEN 20

FACULTEIT

De faculteit van een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ is het product van alle natuurlijke getallen van 1 tot en met n. Dat product noteren we met $n!$, lees als: *n-faculteit*. Bij afspraak is de faculteit van 0 gelijk aan 1.

$$\boxed{\begin{aligned} &n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \\ &0! = 1 \end{aligned}}$$

De faculteit van n neemt sterk toe. Zo is $100!$ al een getal met 158 cijfers.

Vereenvoudigen van uitdrukkingen kan door faculteiten uit te schrijven.

Voorbeelden

(a) $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

(b) $1! = 1$

(c) $$\begin{aligned} (n+1) \cdot n! &= (n+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

(d) $$\frac{100!}{98!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 98} = 99 \cdot 100 = 9900$$

(e) $$\frac{n!}{p!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \cdot p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \ldots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \cdot p}$$

$$= (p+1) \cdot (p+2) \ldots (n-1) \cdot n$$

Met een computerrekenpakket vind je dat $100! =$ 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000.

ONTBINDEN IN FACTOREN 1

AFZONDEREN

Ontbind in factoren wil zeggen: schrijf als een product.

Strategie ontbinden in factoren:

gemeenschappelijke factoren afzonderen

$$ab + ac = a(b+c)$$
$$ab + ac + ad = a(b+c+d)$$
$$ab + ac + ad + ae = a(b+c+d+e)$$
$$\ldots$$

Voorbeelden

(a) $ax + 2ay = a(x+2y)$

(b) $-10x + 25y = 5(-2x+5y) = -5(2x-5y)$

(c) $6a^2b - 15ab^2 = 3ab(2a-5b)$

(d) $18p^3q + 6p^2q^2 = 6p^2q(3p+q)$

(e) $x^2 - 3x^3 + 5x^4 = x^2(1-3x+5x^2)$

(f) $$\begin{aligned} K(1+i) + K(1+i)i &= K(1+i)\cdot 1 + K(1+i)\cdot i \\ &= K(1+i)(1+i) \\ &= K(1+i)^2 \end{aligned}$$

ONTBINDEN IN FACTOREN 2

PRODUCTEN HERKENNEN: KWADRATEN

Strategie ontbinden in factoren (vervolg):

merkwaardige producten herkennen	
verschil kwadraten	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
volkomen kwadraat	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
volkomen kwadraat	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Voorbeelden

(a) $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

(b) $\dfrac{9}{4}x^2 - 1 = \left(\dfrac{3}{2}x - 1\right)\left(\dfrac{3}{2}x + 1\right)$

(c) $\dfrac{9}{4}x^2 - 1 = \dfrac{1}{4}\left(9x^2 - 4\right) = \dfrac{1}{4}(3x-2)(3x+2)$

(d) $$\begin{aligned} x^4 - 25 &= (x^2)^2 - 25 \\ &= (x^2-5)(x^2+5) \\ &= (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5) \end{aligned}$$

(e) $1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 = (1+\sqrt{2}x)^2$

(f) $$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2\cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \\ &= (2x-3)^2 \end{aligned}$$

ONTBINDEN IN FACTOREN 3

PRODUCTEN HERKENNEN: DERDE MACHTEN

Strategie ontbinden in factoren (vervolg):

merkwaardige producten herkennen	
som derde machten	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
verschil derde machten	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
volkomen derde macht	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
volkomen derde macht	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

Voorbeelden

(a) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

(b) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

(c) $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

(d)
$$\begin{aligned}8p^3-27q^6 &= (2p)^3-(3q^2)^3\\ &= (2p-3q^2)\cdot\Big((2p)^2+2p\cdot 3q^2+(3q^2)^2\Big)\\ &= (2p-3q^2)(4p^2+6pq^2+9q^4)\end{aligned}$$

Controle door uitwerken:

$$\begin{aligned}&(2p-3q^2)(4p^2+6pq^2+9q^4)\\ &= 8p^3+12p^2q^2+18pq^4-12p^2q^2-18pq^4-27q^6\\ &\overset{!}{=} 8p^3-27q^6.\end{aligned}$$

ONTBINDEN IN FACTOREN 4

GROEPEREN

Strategie ontbinden in factoren (vervolg):

twee aan twee groeperen

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y) \end{aligned}$$

drie aan één groeperen

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2-c^2 &= (a+b)^2-c^2 \\ &= (a+b-c)(a+b+c) \end{aligned}$$

Voorbeelden

(a) $$\begin{aligned} x^3+x^2-3x-3 &= x^2(x+1)-3(x+1) \\ &= (x^2-3)(x+1) \\ &= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+1) \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} -x^3+x^2+9x-9 &= x^2(-x+1)+9(x-1) \\ &= x^2(-x+1)-9(-x+1) \\ &= (-x+1)(x^2-9) \\ &= (1-x)(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= x^2-6x+9-4 \\ &= (x-3)^2-4 \\ &= (x-3-2)(x-3+2) \\ &= (x-5)(x-1) \end{aligned}$$

ONTBINDEN IN FACTOREN 5

KWADRATISCHE VEELTERM

Strategie ontbinden in factoren (vervolg):

kwadratische veelterm $D > 0$ met nulwaarden x_1 en x_2

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

kwadratische veelterm $D = 0$ met nulwaarde x_1

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Voorbeelden

(a) $\sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

zodat $\sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2$

(b) $16x^5 - 72x^4 + 64x^3 = 8x^3(2x^2 - 9x + 8)$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 17 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8x^3 \cdot 2\left(x - \frac{9 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{9 - \sqrt{17}}{4}\right) \\ &= x^3\left(4x - (9 + \sqrt{17})\right)\left(4x - (9 - \sqrt{17})\right) \\ &= x^3\left(4x - 9 - \sqrt{17}\right)\left(4x - 9 + \sqrt{17}\right) \end{aligned}$$

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

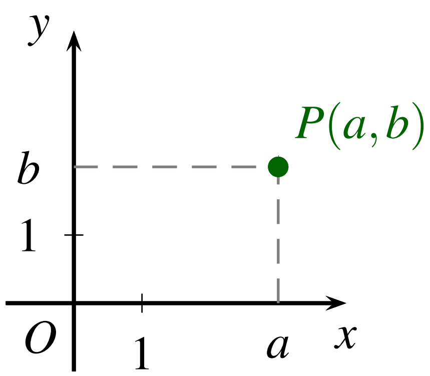
Assensstelsels en grafieken	
Oxy	assenstelsel met oorsprong O en getallenassen x en y
$A, B, P, Q, \ldots$	punten
$[AB]$	het lijnstuk bepaald door de punten A en B
$a, b, p, q, \ldots$	rechten
$\mathcal{C}(M, r)$	de cirkel met middelpunt M en straal r
$G : \square = \triangle$	de grafiek G met als vergelijking $\square = \triangle$
$P \in G$	punt P behoort tot/ligt op de grafiek G
$P \notin G$	punt P behoort niet tot/ligt niet op de grafiek G
$\bullet$	volle bol: het punt behoort nog net tot de grafiek
$\circ$	holle bol: het punt behoort net niet tot de grafiek

Coördinaten en kenmerken van punten en rechten	
$P(a, b)$	punt P met coördinaat (a, b)
$\mathrm{co}(P) = (a, b)$	de coördinaat van punt P is gelijk aan (a, b)
$\mathrm{rico}\, a$	de richtingscoëfficiënt (kortweg rico) van de rechte a
$a \parallel b$	de rechte a is evenwijdig met de rechte b
$a \nparallel b$	de rechte a is niet evenwijdig met de rechte b
$a \perp b$	de rechte a staat loodrecht op de rechte b
$a \not\perp b$	de rechte a staat niet loodrecht op de rechte b
$\|AB\|$	lengte van het lijnstuk bepaald door punten A en B
$d(A, B)$	de afstand tussen de punten A en B
$d(P, r)$	de afstand tussen het punt P en de rechte r

ANALYTISCHE MEETKUNDE 1

ASSENSTELSELS

Een (orthogonaal) assenstelsel Oxy bestaat uit twee getallenassen die loodrecht op elkaar staan, de x-as en de y-as, die elkaar snijden in de oorsprong O. Als de ijk op de x-as en de y-as dezelfde is, dan spreken we ook wel over een orthonormaal assenstelsel.



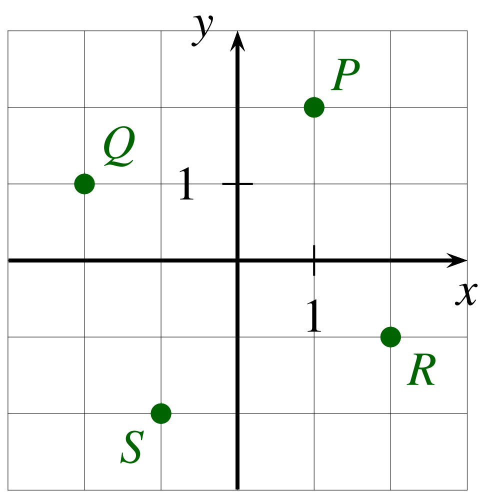
Elk punt P in het vlak is volledig bepaald door een koppel reële getallen (a,b), dat we de coördinaat van P noemen en als volgt noteren:

$$\boxed{P(a,b) \quad \text{of} \quad \mathrm{co}(P) = (a,b)}$$

Hierbij noemen we a de x-coördinaat (of abscis) van P en noemen we b de y-coördinaat (of ordinaat) van P.

Voorbeeld. Voorstelling van de punten P, Q, R en S in nevenstaand assenstelsel, waarbij

$$\mathrm{co}(P) = (1,2)$$
$$\mathrm{co}(Q) = (-2,1)$$
$$\mathrm{co}(R) = (2,-1)$$
$$\mathrm{co}(S) = (-1,-2).$$



ANALYTISCHE MEETKUNDE 2

GRAFIEKEN EN VERGELIJKINGEN

Een grafiek is een verzameling van punten in het vlak. Eenvoudige voorbeelden van grafieken zijn punten, rechten, halfrechten, lijnstukken, driehoeken, cirkels en parabolen.

Een vergelijking van een grafiek G is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{G : \square = \triangle}$$

waarbij $\square$ en $\triangle$ bestaan uit bewerkingen met getallen en met de letters x en y, zodat een punt P van het vlak tot de grafiek behoort precies als $\mathrm{co}(P) = (a,b)$ voldoet aan de vergelijking $\square = \triangle$: vervangen we in $\square$ en $\triangle$ elke x door a en elke y door b, dan geldt de gelijkheid.

Correct tekenen of schetsen van een grafiek in een assenstelsel houdt goede communicatie in. Waar een grafiek (plaatselijk) stopt, tekenen we ofwel een $\bullet$ ofwel een $\circ$. Dat beslissen we als volgt:

een volle bol $\bullet$ betekent: het punt behoort nog net tot de grafiek;

een holle bol $\circ$ betekent: het punt behoort net niet tot de grafiek.

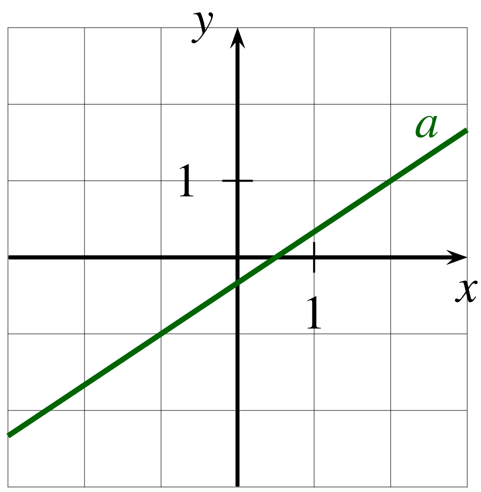
Als een grafiek het assenstelsel verlaat en we daar geen volle of holle bol tekenen, maken we daarmee duidelijk dat de grafiek zich ook buiten het assenstelsel voortzet op de manier die geïnsinueerd wordt.

Voorbeeld. In het assenstelsel hiernaast is een rechte a getekend, met vergelijking

$$a : 2x - 3y = 1.$$

De coördinaten van punten $P(-1,-1)$ en $Q\left(\frac{1}{2},0\right)$ voldoen aan de vergelijking van a zodat $P \in a$ en $Q \in a$.

De coördinaat van het punt $R(3,2)$ voldoet niet aan de vergelijking dus $R \notin a$.

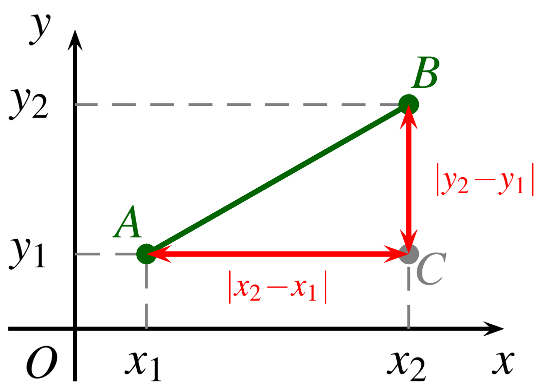


ANALYTISCHE MEETKUNDE 3

AFSTAND TUSSEN TWEE PUNTEN

Beschouw twee verschillende punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$. Het lijnstuk $[AB]$ bestaat uit alle punten op de rechte AB, inclusief de randpunten A en B. De lengte van $[AB]$ noteren we met $|AB|$. We noemen dit ook wel de afstand tussen de punten A en B, ook genoteerd als $d(A, B)$.

Is C het punt met coördinaat (x_2, y_1), dan is ΔABC rechthoekig in C. De lengte van de ene rechthoekszijde is de absolute waarde van het verschil van de x-coördinaten van A en B; bij de andere rechthoekszijde is dat de absolute waarde van het verschil van de y-coördinaten.



Uit de stelling van Pythagoras volgt nu dat

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = \big(\pm(x_2 - x_1)\big)^2 + \big(\pm(y_2 - y_1)\big)^2$$

zodat de afstand tussen de punten A en B gegeven wordt door

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Als $A = B$, dan is de afstand tussen A en B gewoon nul. Ook dan levert de bovenstaande formule het gewenste resultaat.

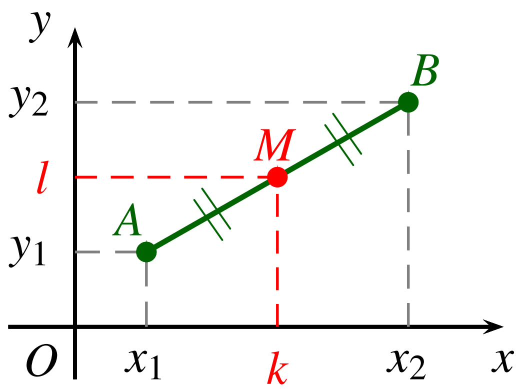
Voorbeeld. Beschouw de punten $P(3, -2)$ en $Q(1, 4)$. Dan is de afstand tussen P en Q gelijk aan

$$d(P, Q) = \sqrt{(1-3)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE 4

MIDDEN VAN EEN LIJNSTUK

Beschouw twee verschillende punten $A(x_1,y_1)$ en $B(x_2,y_2)$. Het midden van het lijnstuk $[AB]$ is het punt M dat op dezelfde afstand van punt A als van punt B ligt, dus $d(A,M) = d(M,B)$. Noem $\text{co}(M) = (k,l)$.



Uit de stelling van Thales volgt nu dat (als $x_1 \neq x_2$)

$$\frac{k-x_1}{x_2-x_1} = \frac{|MA|}{|BA|} \quad \Rightarrow \quad k - x_1 = \frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)$$
$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}(x_1+x_2)\,.$$

Analoog redeneren geeft l, dus het midden M van lijnstuk $[AB]$ is bepaald door

$$\boxed{\text{co}(M) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

Je kan nagaan dat deze formule ook juist is als $x_1 = x_2$ of $y_1 = y_2$. Als $A = B$, dan is het midden van A en B gewoon $M = A = B$. Ook dan levert de bovenstaande formule het gewenste resultaat.

Voorbeeld. Beschouw de punten $P(3,0)$ en $Q(1,-\sqrt{2})$. Dan is de coördinaat van het midden M van lijnstuk $[PQ]$ gelijk aan

$$\text{co}(M) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+(-\sqrt{2})}{2}\right) = \left(2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE 5

VERGELIJKING VAN EEN RECHTE

Een rechte r heeft als vergelijking:

$$\boxed{r : ax + by = c \quad \text{waarbij } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ en } (a, b) \neq (0, 0)}$$

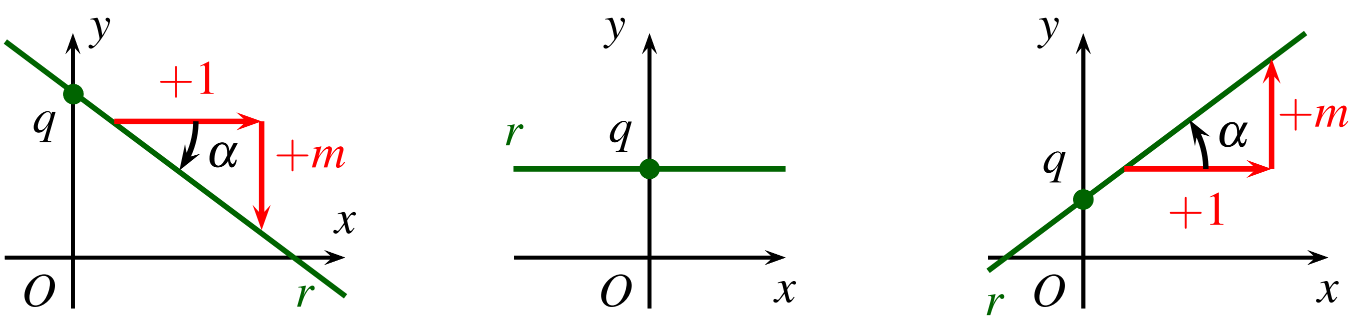
Eerste geval. Als $b \neq 0$ dan is de vergelijking van r te schrijven als

$$\boxed{r : y = mx + q}$$

Als x vermeerdert met 1, zal y vermeerderen met m. Dus m geeft aan of rechte dalend $(m < 0)$, horizontaal $(m = 0)$ of stijgend $(m > 0)$ is. We noemen m dan ook de richtingscoëfficiënt (of rico) van de rechte.

Hellingshoek α heeft een hoekwaarde tussen -90° en 90°, en $\tan \alpha = m$.

$m < 0$ $-90^\circ < \alpha < 0$	$m = 0$ $\alpha = 0^\circ$	$m > 0$ $0 < \alpha < 90^\circ$

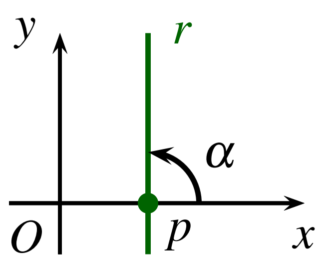


Tweede geval. Als $b = 0$ dan is de vergelijking van r te schrijven als

$$\boxed{r : x = p}$$

Deze keer is de rechte verticaal, en bij zo'n rechte is er geen rico (bestaat niet).

De hellingshoek α van de rechte is dan 90°.



ANALYTISCHE MEETKUNDE 6

RECHTE BEPAALD DOOR RICO EN PUNT OF DOOR TWEE PUNTEN

Beschouw een rechte $r: y = mx + q$ met $m, q \in \mathbb{R}$. Als x met 1 vermeerdert, zal y met $m = \text{rico}\, r$ vermeerderen.

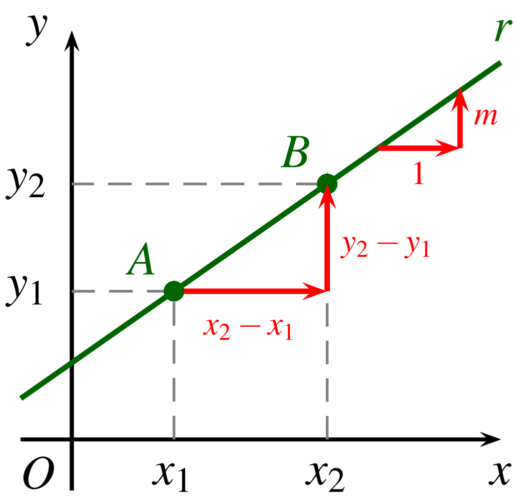
Beschouw nu twee verschillende punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ op de rechte r. Als we in punt A de x-waarde met $x_2 - x_1$ vermeerderen, moet de y-waarde met $y_2 - y_1$ vermeerderen om punt B te verkrijgen.

Wegens gelijkvormige driehoeken is

$$\boxed{m = \text{rico}\, r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

en de vergelijking van de rechte r is dan

$$\boxed{r: y - y_1 = m(x - x_1)}$$



Voorbeelden

(a) Rechte r met rico $m = 3$ door punt $A(-1, 2)$ heeft vergelijking

$$r: y - 2 = 3\big(x - (-1)\big) \qquad \text{of nog:} \qquad r: y = 3x + 5.$$

(b) Voor de rechte a door punten $P(5, 3)$ en $Q(20, -7)$ is

$$\text{rico}\, a = \frac{-7-3}{20-5} = \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3}$$

zodat

$$a: y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{of nog:} \qquad a: 2x + 3y = 19.$$

Controle: nagaan of coördinaten P en Q aan vergelijking voldoen:

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \overset{!}{=} 19 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-7) \overset{!}{=} 19.$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE 7

EVENWIJDIGE RECHTEN EN LOODRECHTE STAND VAN RECHTEN

Beschouw niet-verticale rechten a en b, zodat hun rico's bestaan. De rechten a en b zijn evenwijdig als en slechts als hun rico's gelijk zijn:

$$\boxed{a \mathbin{/\!/} b \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rico} a = \operatorname{rico} b}$$

De rechten a en b staan loodrecht op elkaar als en slechts het product van hun rico's gelijk is aan -1, in symbolen:

$$\boxed{a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rico} a \cdot \operatorname{rico} b = -1}$$

Als a of b een verticale rechte is, kan evenwijdigheid en loodrechte stand bepaald worden door na te gaan of de andere rechte verticaal of horizontaal is.

Voorbeelden. Gegeven zijn de rechten

$$a : y = 2x - 8 \qquad b : 6x - 3y = 5 \qquad c : y = 0,3$$
$$p : x + 2y = \pi \qquad q : \sqrt{3}x = \sqrt{12}y \qquad r : 5x - 3 = 0.$$

(a) $\operatorname{rico} a = 2 = \operatorname{rico} b$ dus $a \mathbin{/\!/} b$

(b) $\operatorname{rico} a = 2$ en $\operatorname{rico} c = 0$ zodat $\operatorname{rico} a \neq \operatorname{rico} c$, dus $a \not\parallel c$

(c) $\operatorname{rico} a = 2$ en $\operatorname{rico} p = -\dfrac{1}{2}$ zodat $\operatorname{rico} a \cdot \operatorname{rico} p = -1$, dus $a \perp p$

(d) $\operatorname{rico} a = 2$ en $\operatorname{rico} q = \dfrac{1}{2}$ zodat $\operatorname{rico} a \cdot \operatorname{rico} q \neq -1$, dus $a \not\perp q$

(e) c is horizontaal en r is verticaal dus $c \not\parallel r$ en $c \perp r$

(f) $\operatorname{rico} a = 2 = \operatorname{rico} a$ dus $a \mathbin{/\!/} a$, en $\operatorname{rico} a \cdot \operatorname{rico} a \neq -1$ dus $a \not\perp a$

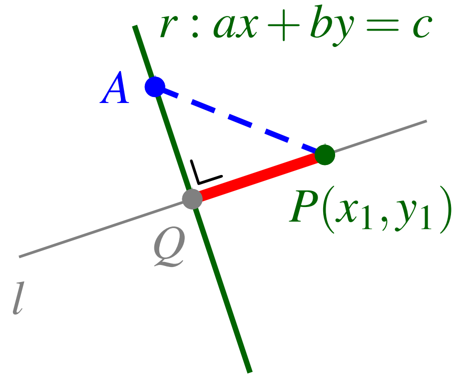
ANALYTISCHE MEETKUNDE 8

AFSTAND VAN PUNT TOT RECHTE

De afstand van een punt P tot een rechte r is de kortste afstand tussen punt P en een willekeurig punt A van rechte r. Die afstand noteren we met $d(P,r)$. Noem Q het voetpunt van de loodlijn l uit P op r. Dan is

$$\forall A \in r : d(P,A) \geq d(P,Q).$$

Hieruit volgt dat $d(P,r) = d(P,Q)$.



Als $\mathrm{co}(P) = (x_1, y_1)$ en $r : ax + by = c$ dan is de afstand van het punt P tot de rechte r

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Voorbeelden

(a) De afstand van punt $P(5,2)$ tot rechte $r : 3x + 4y = 24$ is

$$d(P,r) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 24|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}.$$

(b) De afstand van punt $A(-4,7)$ tot rechte $p : \sqrt{3}x + 5 = 0$ is

$$d(A,p) = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot (-4) + 0 \cdot 7 + 5\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2}} = \frac{\left|5 - 4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}} = 4 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 1,11.$$

(c) De afstand van punt $B(-8,27)$ tot rechte $q : y = -\frac{7}{2}x - 1$, te herschrijven als $q : 7x + 2y = -2$, is gelijk aan

$$d(B,q) = \frac{|7 \cdot (-8) + 2 \cdot 27 + 2|}{\sqrt{7^2+2^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{53}} = 0.$$

Dat wil zeggen dat $B \in q$. En inderdaad: $27 \stackrel{!}{=} -\frac{7}{2}(-8) - 1$.

ANALYTISCHE MEETKUNDE 9

VERGELIJKING VAN EEN PARABOOL

Beschouw een punt $T(k,l)$ en $a \in \mathbb{R}_0$. De parabool $\mathcal{P}$ met verticale symmetrieas $x = k$, top T en openingscoëfficient a heeft als vergelijking

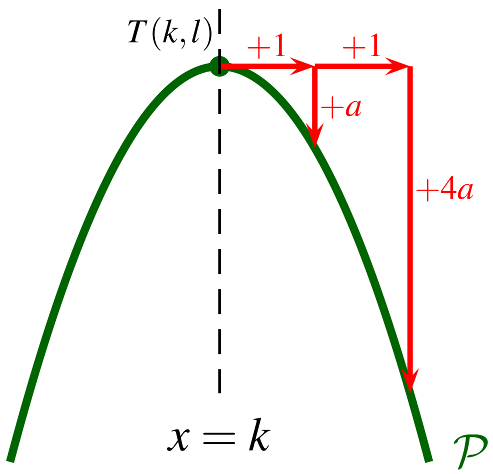
$$\boxed{\mathcal{P} : y - l = a(x-k)^2}$$

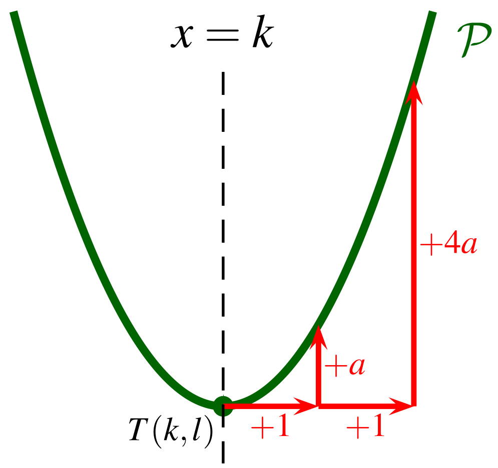
Door $(x-k)^2$ uit te werken, kun je deze vergelijking herschrijven:

$$\boxed{\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c \quad \text{waarbij } k = -\frac{b}{2a} \text{ en } l = f(k)}$$

Als $a < 0$ dan is $\mathcal{P}$ een bergparabool; als $a > 0$ dan is $\mathcal{P}$ een dalparabool.

$\boxed{a < 0}$ of $\boxed{a > 0}$





Je kan de ligging van $\mathcal{P}$ ten opzichte van de x-as weten door de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen. Bereken discriminant $D = b^2 - 4ac$.

- ▷ $D > 0$: twee snijpunten met x-as, symmetrisch t.o.v. $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- ▷ $D = 0$: één snijpunt met x-as (rakend), gelegen op $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- ▷ $D < 0$: geen snijpunten met x-as, parabool ligt onder of boven x-as.

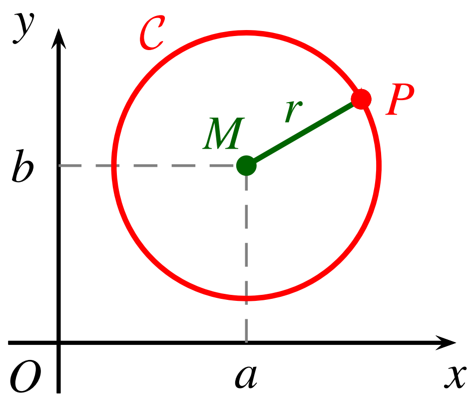
ANALYTISCHE MEETKUNDE 10

VERGELIJKING VAN EEN CIRKEL

Beschouw een punt $M(a,b)$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$. De cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van alle punten P die op afstand r van punt M liggen. We noteren die cirkel met $\mathcal{C}(M,r)$ of kortweg $\mathcal{C}$.

Is $P(x,y)$ een willekeurig punt, dan volgt uit de formule voor de afstand tussen twee punten:

$$
\begin{aligned}
& P \in \mathcal{C} \\
\Leftrightarrow \quad & d(M,P) = r \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \\
\Leftrightarrow \quad & (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.
\end{aligned}
$$



Dus de vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is

$$\boxed{\mathcal{C} : (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

Voorbeelden

(a) Vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(4,-3)$ en straal 5:

$$\mathcal{C} : (x-4)^2+(y+3)^2 = 25.$$

Als $\text{co}(P) = (1,-7)$, dan is $P \in \mathcal{C}$ want $(1-4)^2+(-7+3)^2 \overset{!}{=} 25$.

(b) Grafiek $G : x^2+y^2+2x-6y+5=0$ is een cirkel want

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2+2x-6y+5 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2}_{(x+1)^2} - 1^2 + \underbrace{y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2}_{(y-3)^2} - 3^2 + 5 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x+1)^2+(y-3)^2 = 5
\end{aligned}
$$

is vergelijking van cirkel met middelpunt $M(-1,3)$ en straal $\sqrt{5}$.

GONIOMETRIE

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Hoeken en georiënteerde hoeken	
$B\widehat{A}C$	de hoek begrensd door halfrechten $[AB$ en $[AC$ met B en C in volgorde van tegenwijzerzin rond A genoteerd
$\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots$	een hoek bepaald door twee rechten snijdend in punt A
$\widehat{A}$	de binnenhoek van een driehoek in hoekpunt A
$\alpha, \beta, \ldots$	een hoek of een georiënteerde hoek, naargelang context
$-\alpha$	de tegengestelde hoek van de georiënteerde hoek α
$180^\circ - \alpha$	de supplementaire hoek van de georiënteerde hoek α
$90^\circ - \alpha$	de complementaire hoek van de georiënteerde hoek α

Hoekwaarden in graden		
$^\circ$	(boog)graden	1° is een 360ste deel van een cirkel
$'$	(boog)minuten	$1'$ is een 60ste deel van een graad
$''$	(boog)seconden	$1''$ is een 60ste deel van een minuut

Goniometrische getallen van (georiënteerde) hoeken	
$\sin\alpha$	de sinus van de (georiënteerde) hoek α
$\cos\alpha$	de cosinus van de (georiënteerde) hoek α
$\tan\alpha$	de tangens van de (georiënteerde) hoek α
$\cot\alpha$	de cotangens van de (georiënteerde) hoek α

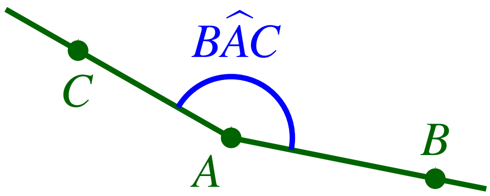
GONIOMETRIE 1

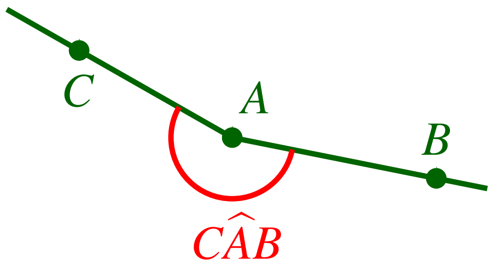
HOEKEN

Een hoek is een vlakdeel begrensd door twee halfrechten met hetzelfde beginpunt. Het vlakdeel in kwestie wordt aangeduid met een boog.

Twee verschillende halfrechten met hetzelfde beginpunt A bepalen twee vlakdelen en dus twee hoeken. Ligt B op de ene halfrechte en C op de andere, dan kun je de twee hoeken met $B\widehat{A}C$ en $C\widehat{A}B$ noteren.

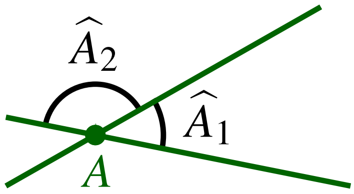
Om in het vlak het onderscheid tussen die twee hoeken te maken, spreken we af dat in het bedoelde vlakdeel de letters steeds in volgorde van tegenwijzerzin rond A worden genoteerd.

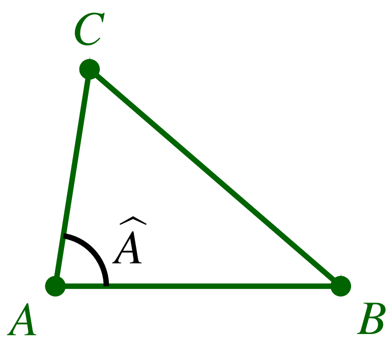




Twee snijdende rechten bepalen vier vlakdelen en dus vier hoeken. Die hoeken kunnen aangeduid worden met een cijfer: $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ etc.

Werken we in een driehoek ABC, dan bedoelen we met de (binnen)hoek $\widehat{A}$ steeds het vlakdeel waarin de driehoek ligt.





Hoeken worden ook vaak met een Griekse letter genoteerd: α, β etc.

GONIOMETRIE 2

HOEKEN METEN IN GRADEN

Je kan een hoek meten in (boog)graden, waarbij 1 graad staat voor een 360ste deel van een volledige cirkel. Verder heeft 1 graad 60 (boog)minuten en 1 minuut heeft 60 (boog)seconden. Het resultaat noemen we een (hoek)waarde in graden van de hoek. Om die hoekwaarde in graden bij benadering te kennen, kun je een gradenboog gebruiken.

Bij elke hoek ligt de hoekwaarde tussen 0° en 360° of is de hoekwaarde gelijk aan 360° (samenvallende halfrechten). Twee hoeken zijn gelijk als ze dezelfde waarde in graden hebben.

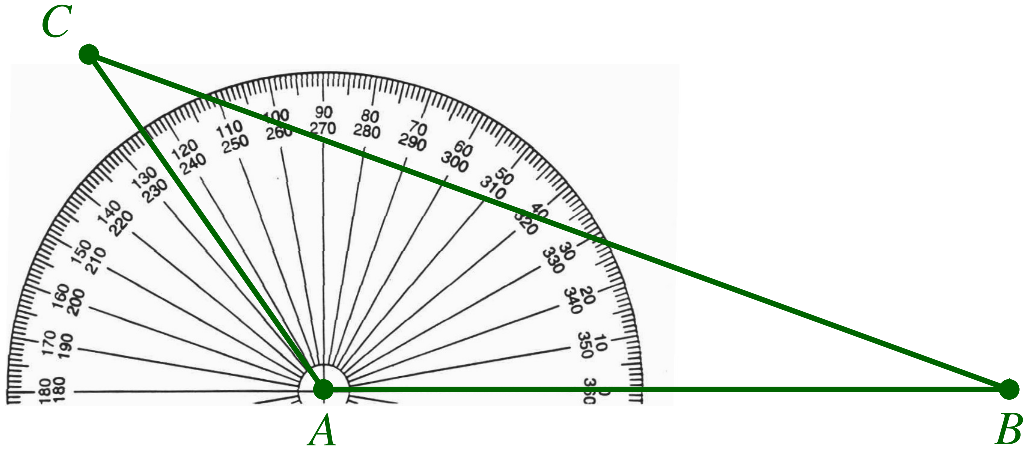
Ligt de hoekwaarde tussen 0° en 90°, dan spreken we van een scherpe hoek. Als ze tussen 90° en 180° ligt, hebben we een stompe hoek.

De rechte hoek meet 90°, de gestrekte hoek 180°, de volle hoek 360°.

Voorbeeld 1. Als α een hoek is met hoekwaarde 31 graden, 53 minuten en 7 seconden, dan schrijven we $\alpha = 31^\circ 53' 7''$. Dat kan ook met een decimale vorm in graden worden uitgedrukt:

$$\alpha = 31^\circ 53' 7'' = \left(31 + \frac{53}{60} + \frac{7}{3600}\right)^\circ = (31{,}885277\ldots)^\circ.$$

Voorbeeld 2. In onderstaande driehoek is $\widehat{A} \approx 125^\circ$. De binnenhoek $\widehat{A}$ is dus een stompe hoek.



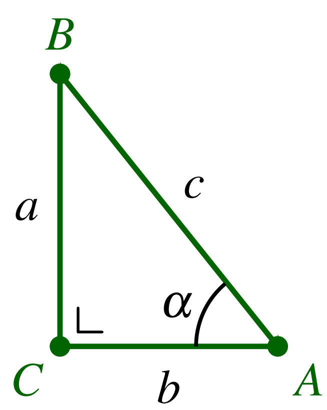
GONIOMETRIE 3

GONIOMETRISCHE GETALLEN VAN SCHERPE HOEKEN

Voor elke scherpe hoek α kunnen we een driehoek ABC tekenen die rechthoekig is in C en waarbij $\alpha = \widehat{A}$.

De goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens van α zijn

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{b}{c} \\ \tan\alpha &= \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{a}{b} \end{aligned}}$$



De cotangens van α is het omgekeerde van de tangens van α.

Uit deze definities volgt meteen dat

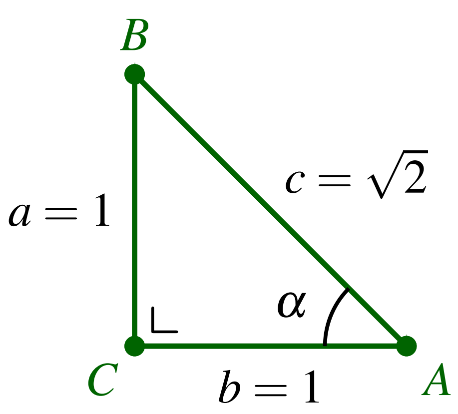
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad \text{en} \quad \boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Voorbeeld. De scherpe hoek $\alpha = 45°$ is een binnenhoek van ΔABC.

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$



De eerste letters in de verhoudingen voor sinus, cosinus en tangens geven het ezelsbruggetje *soscastoa*.

GONIOMETRIE 4

SINUS, COSINUS EN TANGENS VAN ENKELE SCHERPE HOEKEN

De volgende tabel geeft de exacte waarden voor de sinus, cosinus en tangens van de veelvoorkomende scherpe hoeken 30°, 45° en 60°.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Voorbeeld. Beschouw de gelijkzijdige ΔABD met $c = 2$. Als $2a = c$, dan is $a = 1$. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat $b = \sqrt{3}$. Nu is ΔABC rechthoekig met binnenhoeken $\alpha = 30°$ en $\beta = 60°$.

$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

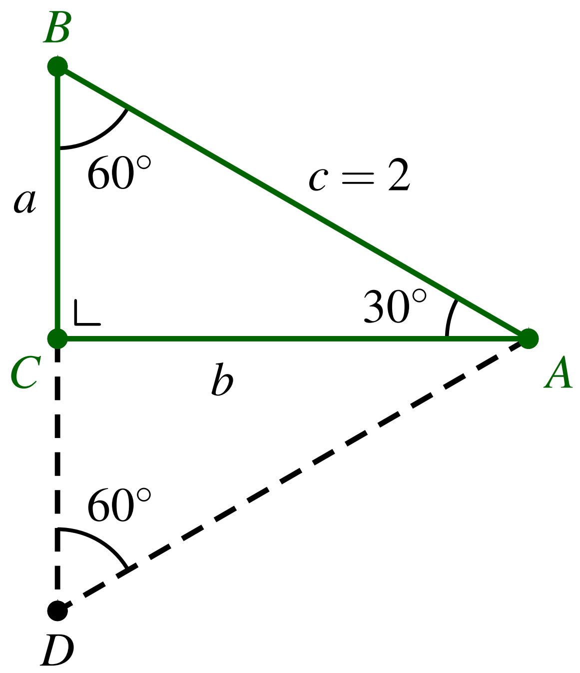
$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$$

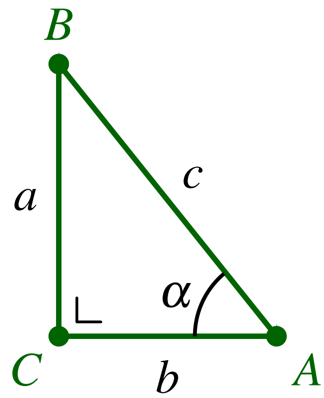


GONIOMETRIE 5

GRONDFORMULE GONIOMETRIE VOOR SCHERPE HOEKEN

Voor elke scherpe hoek α kunnen we een rechthoekige driehoek ABC tekenen die rechthoekig is in C en waarbij $\alpha = \widehat{A}$.

De stelling van Pythagoras leidt tot



$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 = c^2 \;&\Rightarrow\; \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \\
&\Rightarrow\; \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \\
&\Rightarrow\; (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Gebruiken we de notaties $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$ en $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$, dan verkrijgen we de grondformule van de goniometrie voor scherpe hoeken:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{voor elke scherpe hoek } \alpha}$$

Bijgevolg is

$$\boxed{0 < \sin\alpha < 1 \qquad \text{en} \qquad 0 < \cos\alpha < 1 \qquad \text{voor elke scherpe hoek } \alpha}$$

Beide leden delen door $\cos^2\alpha$ resp. $\sin^2\alpha$ levert de aanverwante formule

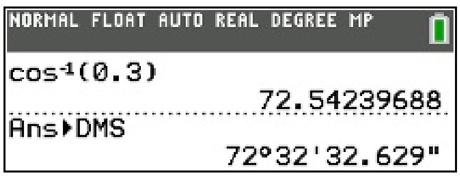
$$\boxed{\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}} \qquad \text{resp.} \qquad \boxed{1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Voorbeeld 1. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Voorbeeld 2. Als α een scherpe hoek is met $\cos\alpha = 0,3$ dan is

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{0,91} = 0,95\ldots$

Met een rekenmachine: $\alpha \approx 72^\circ\, 32'\, 33''$.

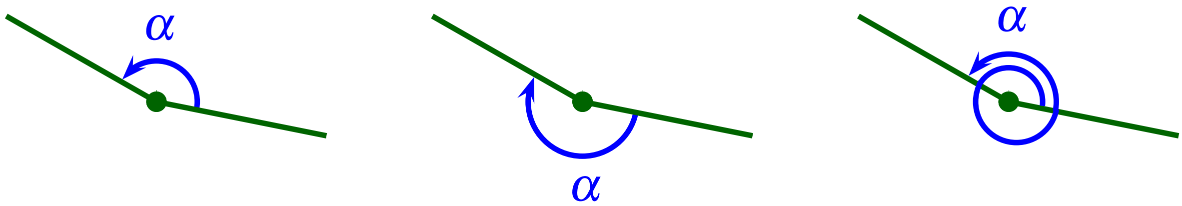


GONIOMETRIE 6

GEORIËNTEERDE HOEKEN

Een hoek is een vlakdeel begrensd door twee halfrechten met hetzelfde beginpunt. Die twee halfrechten oriënteren betekent dat je een halfrechte als beginbeen en dus de andere halfrechte als eindbeen kiest.

Die keuze in oriëntatie duiden we aan door *een* pijl te tekenen van beginbeen naar eindbeen. Dat kan op meerdere manieren, al stelt elke pijl dezelfde georiënteerde hoek α voor.



Elke pijl kan gemeten worden met een gradenboog. We voorzien die waarde ook van een teken: plus bij tegenwijzerzin en min bij wijzerzin. Elk van de drie pijlen hierboven geeft dus een hoekwaarde in graden:

$$\begin{aligned} \alpha &= +165^\circ \\ &= 165^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= -195^\circ \\ &= 165^\circ - 360^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 525^\circ \\ &= 165^\circ + 360^\circ. \end{aligned}$$

Bij elke georiënteerde hoek α horen oneindig veel pijlen van beginbeen naar eindbeen, en dus ook oneindig veel hoekwaarden in graden. Willen we van α hierboven alle hoekwaarden in graden geven, dan schrijven we:

$$\boxed{\alpha = 165^\circ + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

Draaien we bij α de oriëntatie om (beginbeen wordt eindbeen en omgekeerd) dan spreken we over de tegengestelde (georienteerde) hoek $-\alpha$.

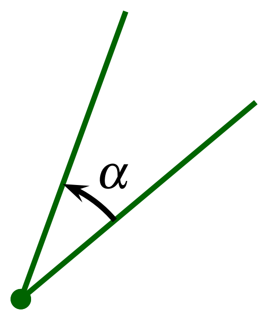
Twee georiënteerde hoeken zijn gelijk als ze dezelfde hoekwaarden in graden hebben. We hebben steeds $\alpha \neq -\alpha$, tenzij $\alpha = 0^\circ$ of $\alpha = 180^\circ$.

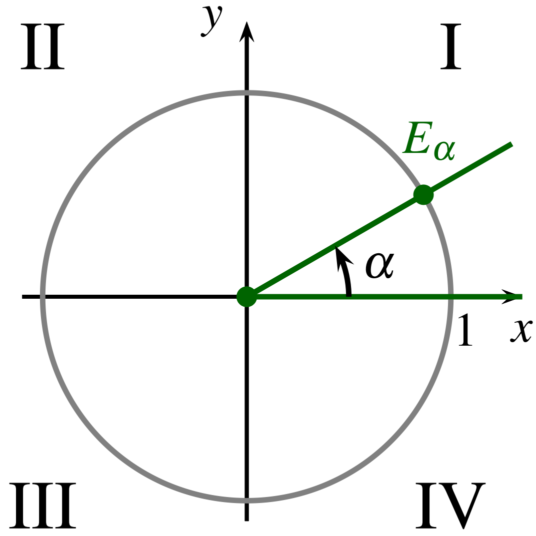
GONIOMETRIE 7

GONIOMETRISCHE CIRKEL

De goniometrische cirkel heeft als middelpunt de oorsprong en straal 1.

Een georiënteerde hoek α voorstellen op de goniometrische cirkel wil zeggen: verschuiven en draaien zodat het beginbeen samenvalt met de positieve x-as. Het nieuwe eindbeen snijdt de cirkel in een punt E_α die we het beeldpunt van α noemen.





De x-as en de y-as verdelen het vlak in vier vlakdelen, in tegenwijzerzin doorlopen: eerste kwadrant I, tweede kwadrant II, derde kwadrant III en vierde kwadrant IV. Een punt op x-as of y-as ligt in geen enkel kwadrant.

Als $E_\alpha \in I$, dan zeggen we dat α in het eerste kwadrant ligt. We schrijven dan $\alpha \in$ I. Idem voor de andere kwadranten.

Voorbeelden. Beschouw georiënteerde hoeken α, β, γ en θ.

(a) Als $\alpha = 30^\circ$ dan is $\alpha \in$ I.

(b) Als $\beta = 179^\circ$ dan is $\beta \in$ II.

(c) Als $\gamma = -64^\circ$ dan is $\gamma \in$ IV.

(d) Als $\theta = 2023^\circ$ dan is $\theta \in$ III, want een andere hoekwaarde is

$$\theta = 2023^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 223^\circ.$$

GONIOMETRIE 8

GONIOMETRISCHE GETALLEN VAN GEORIËNTEERDE HOEKEN

Elke georiënteerde hoek α kan voorgesteld worden op de goniometrische cirkel: beginbeen op positieve x-as en eindbeen snijdt cirkel in punt E_α.

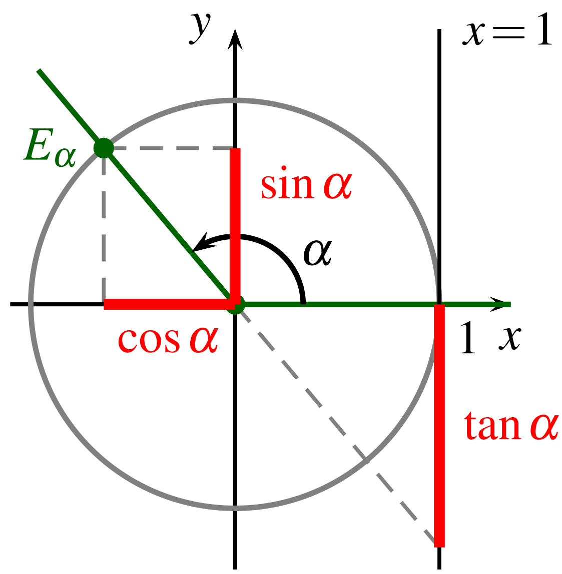
De goniometrische getallen sinus, cosinus, tangens, cotangens van α zijn:

$$\sin\alpha = \text{de } y\text{-coördinaat van } E_\alpha$$

$$\cos\alpha = \text{de } x\text{-coördinaat van } E_\alpha$$

$$\tan\alpha = \text{rico } OE_\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Hieruit volgt dat voor elke georiënteerde hoek α

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad \text{en} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

Als $\cos\alpha = 0$ dan $\tan\alpha = /$ (bestaat niet); als $\sin\alpha = 0$ dan $\cot\alpha = /$.

Voorbeeld. Door de georiënteerde hoeken met hoekwaarden $0°$, $90°$, $180°$ en $270°$ voor te stellen op de goniometrische cirkel, lezen we hun sinus, cosinus en tangens af. De derde rij verkrijg je ook door de eerste te delen door de tweede.

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	/	0	/

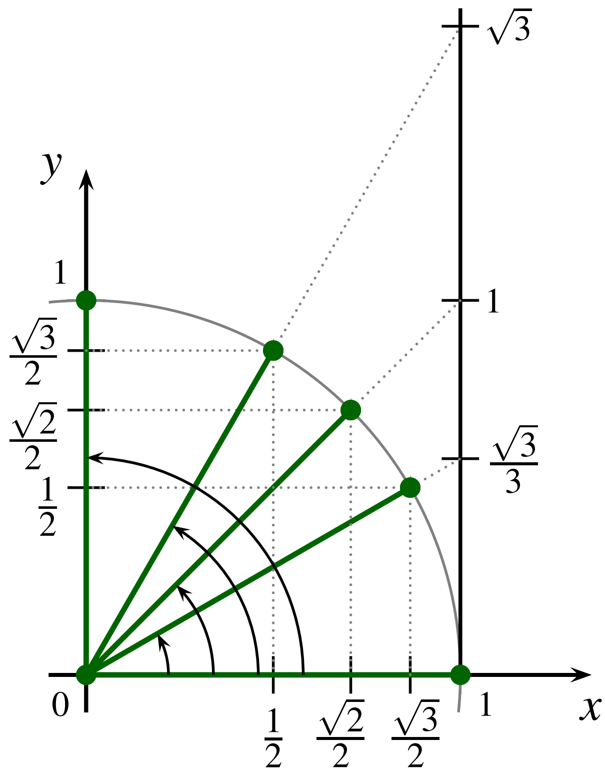
GONIOMETRIE 9

SINUS, COSINUS EN TANGENS VAN ENKELE GEORIËNTEERDE HOEKEN

De volgende tabel geeft de exacte waarden voor de sinus, cosinus en tangens van de georiënteerde standaardhoeken 0°, 30°, 45°, 60° en 90°.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Onthouden met inzicht kan door de georiënteerde hoeken voor te stellen:



Geheugensteuntje voor tabel: (1) schrijf in eerste rij 0, 1, 2, 3, 4; (2) neem de positieve vierkantswortel; (3) deel door 2; (4) vorm de tweede rij door de eerste om te draaien; (5) vorm de derde rij door de eerste rij te delen door de tweede.

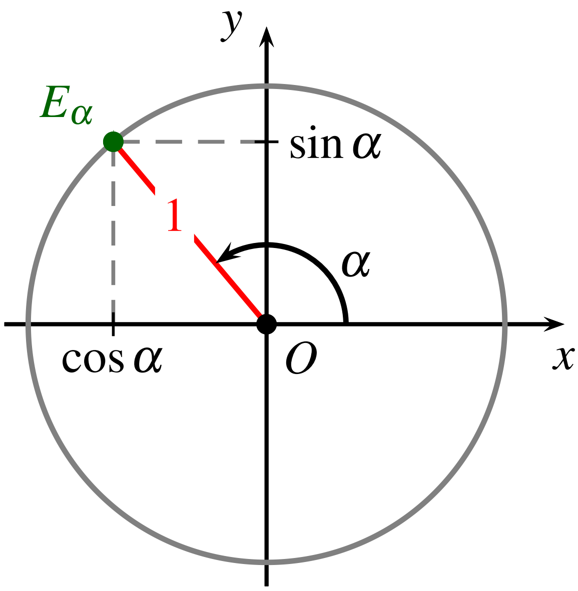
GONIOMETRIE 10

GRONDFORMULE VAN DE GONIOMETRIE

Elke georiënteerde hoek α kan voorgesteld worden op de goniometrische cirkel: beginbeen op positieve x-as en eindbeen snijdt cirkel in punt E_α.

Uit $\cos\alpha = x$-coördinaat van E_α en $\sin\alpha = y$-coördinaat van E_α volgt

$$\boxed{\operatorname{co}(E_\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)}$$



Formule afstand tussen twee punten:

$$d(O,E_\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\cos\alpha-0)^2+(\sin\alpha-0)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2 = 1^2.$$

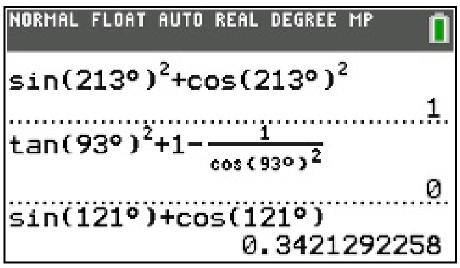
Zo verkrijgen we de grondformule van de goniometrie

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \quad \text{voor elke georiënteerde hoek } \alpha}$$

Beide leden delen door $\cos^2\alpha$ resp. $\sin^2\alpha$ levert de aanverwante formule

$$\boxed{\tan^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}} \quad \text{resp.} \quad \boxed{1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Deze formules zijn goniometrische identiteiten: de gelijkheid geldt voor elke α waarvoor de uitdrukking zinvol is. Je kan zo'n identiteit controleren met een rekenmachine door α willekeurig te kiezen.



GONIOMETRIE 11

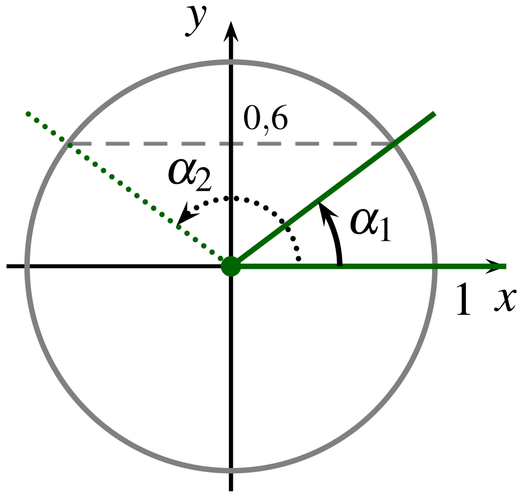
GONIOMETRISCHE GETALLEN BEREKENEN

Vanuit de waarde van een goniometrisch getal kun je de bijbehorende georiënteerde hoeken voorstellen op de goniometrische cirkel. De andere goniometrische getallen kun je dan bepalen met formules.

Voorbeeld 1. Beschouw een georiënteerde hoek α met $\sin\alpha = 0,6$.
Omdat $\sin\alpha > 0$ is $\alpha \in \mathrm{I}$ of $\alpha \in \mathrm{II}$.

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ &= \pm\sqrt{0,64}\\ &= \pm\sqrt{\frac{64}{100}} = \pm\frac{8}{10} = \pm 0,8\end{aligned}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,6}{\pm 0,8} = \pm\frac{3}{4}$$

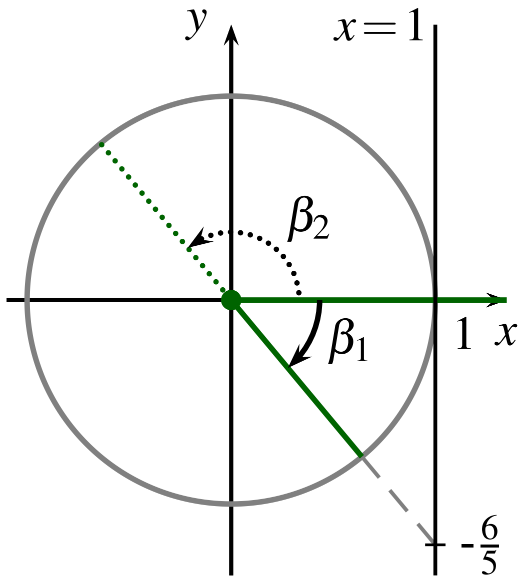


Met rekenmachine: $\alpha_1 \approx 36^\circ\,52'\,12''$.
Dan is $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 143^\circ\,7'\,48''$.

Voorbeeld 2. Beschouw een georiënteerde hoek β met $\tan\beta = -\dfrac{6}{5}$.
Omdat $\tan\beta < 0$ is $\beta \in \mathrm{II}$ of $\beta \in \mathrm{IV}$.

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \pm\sqrt{\frac{1}{\tan^2\beta+1}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{25}{61}} = \pm\frac{5}{\sqrt{61}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \tan\beta\cdot\cos\beta\\ &= \left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\pm\frac{5}{\sqrt{61}}\right) = \mp\frac{6}{\sqrt{61}}\end{aligned}$$



Met rekenmachine: $\beta_1 \approx -50^\circ\,11'\,40''$.
Dan is $\beta_2 = \beta_1 + 180^\circ \approx 129^\circ\,48'\,20''$.

GONIOMETRIE 12

GONIOMETRISCHE UITDRUKKINGEN VEREENVOUDIGEN

Een goniometrische uitdrukking bevat goniometrische getallen van willekeurige georiënteerde hoeken α, β etc. waarvoor de uitdrukking zinvol is.

Stappenplan vereenvoudigen van goniometrische uitdrukkingen:

Stap 1. Schrijf alle goniometrische getallen met sinus en cosinus
Gebruik daarvoor de definitie van tangens en cotangens

Stap 2. Werk uit en vereenvoudig breuken

Stap 3. Vereenvoudig met behulp van goniometrische formules

Soms kun je efficiënter werken door $1+\tan^2\alpha$ of $1+\cot^2\alpha$ te herkennen. Je kan ook gebruik maken van merkwaardige producten.

Voorbeelden

(a) $$\frac{1}{\tan^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}=\frac{-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-1$$

(b) $$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

(c) $$(4\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+4\cos\alpha)^2$$
$$=16\sin^2\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha+16\cos^2\alpha$$
$$=17\sin^2\alpha+17\cos^2\alpha$$
$$=17\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=17$$

(d) $$1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=1+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=1+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot 1=1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha$$

GONIOMETRIE 13

GONIOMETRISCHE IDENTITEITEN BEWIJZEN

Een goniometrische identiteit bewijzen wil zeggen: aantonen dat de gegeven gelijkheid geldt voor elke (zinvolle) georiënteerde hoek α, β etc.

Stappenplan bewijzen van goniometrische identiteiten:

Stap 1. Start met linkerlid (LL) of rechterlid (RL)
Meestal is dat het lid waar je meteen iets kan uitwerken

Stap 2. Werk uit en vereenvoudig breuken

Stap 3. Pas goniometrische formules toe: enkel formules die je dichter bij het ander lid brengen!

Stap 4. Als je vastloopt: vergelijk met het ander lid

Een andere strategie is om beide leden (tegelijk) om te vormen.

Voorbeelden

(a) Bewijs dat $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

$$\text{RL} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1} = \text{LL}$$

(b) Bewijs dat $(\sin\alpha\cos\beta)^2 - (\cos\alpha\sin\beta)^2 = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

$$\begin{aligned}\text{LL} &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= \left(1-\cos^2\alpha\right)\cos^2\beta - \cos^2\alpha\left(1-\cos^2\beta\right) \\ &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta = \text{RL}\end{aligned}$$

GONIOMETRIE 14

FORMULES VERWANTE HOEKEN: GELIJKE HOEKEN

Als we bij een hoekwaarde van een georiënteerde hoek een geheel veelvoud van 360° optellen, verkrijgen we een andere hoekwaarde van dezelfde georiënteerde hoek α:

$$\boxed{\alpha + k \cdot 360^\circ = \alpha \qquad \text{voor elke } k \in \mathbb{Z}}$$

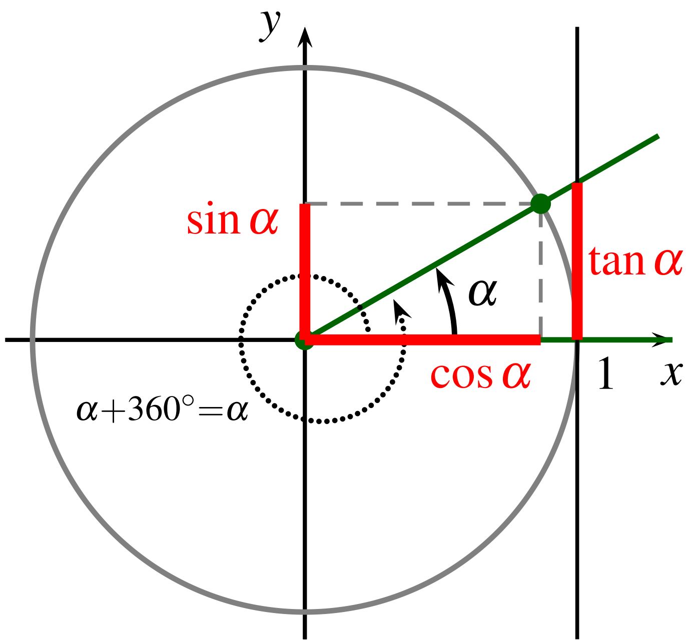
Uiteraard blijven dan ook sinus, cosinus en tangens hetzelfde.

voor elke $k \in \mathbb{Z}$ is

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \tan \alpha$$



Voorbeelden

(a) $\sin(390^\circ) = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos(405^\circ) = \cos(405^\circ - 360^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\tan(-300^\circ) = \tan(-300^\circ + 360^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(d) $\sin 3550^\circ = \sin(3550^\circ - 10 \cdot 360^\circ) = \sin(-50^\circ) = \sin 310^\circ$

(e) $\cot(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \dfrac{1}{\tan(\alpha + k \cdot 360^\circ)} = \dfrac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

GONIOMETRIE 15

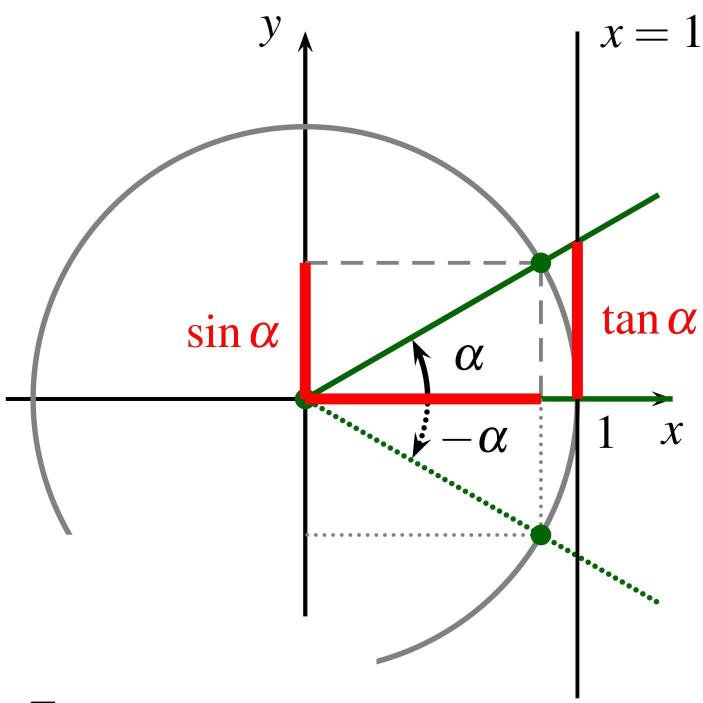
FORMULES VERWANTE HOEKEN: TEGENGESTELDE HOEKEN

Als we bij een georiënteerde hoek α de oriëntatie omdraaien (beginbeen wordt eindbeen en omgekeerd), vinden we de tegengestelde hoek $-\alpha$.

De hoekwaarden in graden worden dan tegengesteld, net zoals de sinus en de tangens. De cosinus blijft ongewijzigd.

Onthoud deze formules met behulp van de goniometrische cirkel.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$



Voorbeelden

(a) $\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

(c) $\tan 330^\circ = \tan(330^\circ - 360^\circ) = \tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $\sin 243^\circ = \sin(243^\circ - 360^\circ) = \sin(-117^\circ) = -\sin 117^\circ$

(e) $\cot(-\alpha) = \dfrac{1}{\tan(-\alpha)} = \dfrac{1}{-\tan\alpha} = -\dfrac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$

GONIOMETRIE 16

FORMULES VERWANTE HOEKEN: SUPPLEMENTAIRE HOEKEN

Als we van 180° een hoekwaarde van een georiënteerde hoek α aftrekken, verkrijgen we een hoekwaarde van de zogenaamde supplementaire hoek van α. Die nieuwe georiënteerde hoek noteren we als $180° - \alpha$.

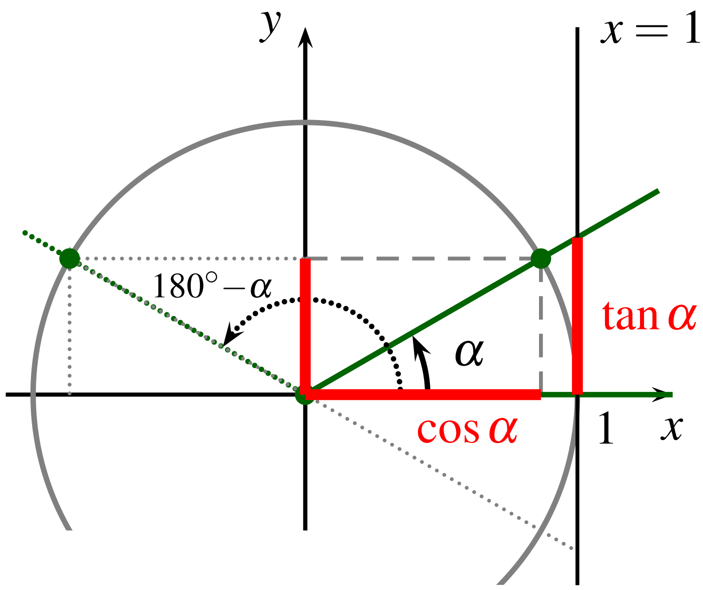
Cosinus en tangens worden dan tegengesteld; sinus blijft ongewijzigd.

Onthoud deze formules met behulp van de goniometrische cirkel.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$



Voorbeelden

(a) $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

(d) $\sin(243°) = \sin(180° - (-63°)) = \sin(-63°) = -\sin 63°$

(e) $\cot(180° - \alpha) = \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$

GONIOMETRIE 17

FORMULES VERWANTE HOEKEN: COMPLEMENTAIRE HOEKEN

Als we van 90° een hoekwaarde van een georiënteerde hoek α aftrekken, verkrijgen we een hoekwaarde van de zogenaamde complementaire hoek van α. Die nieuwe georiënteerde hoek noteren we als $90° - \alpha$.

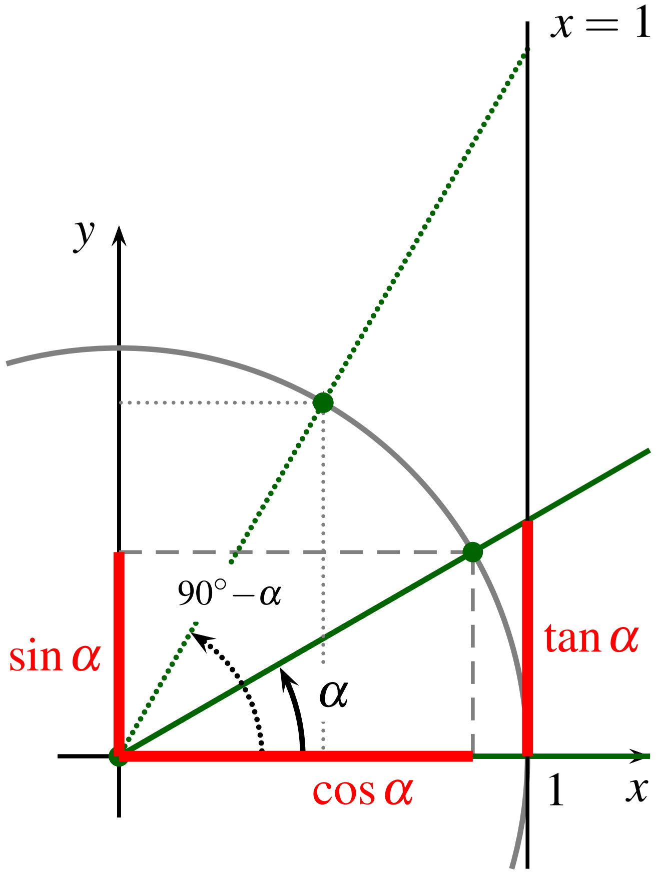
Sinus en cosinus worden verwisseld, en dus ook tangens en cotangens.

Onthoud deze formules met behulp van de goniometrische cirkel.

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$



Voorbeelden

(a) $\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30°$

(b) $\cos 45° = \cos(90° - 45°) = \sin 45°$

(c) $\tan 30° = \tan(90° - 60°) = \cot 60°$

(d) $\sin 3695° = \sin(95°) = \sin(90° - (-5°)) = \cos(-5°) = \cos(5°)$

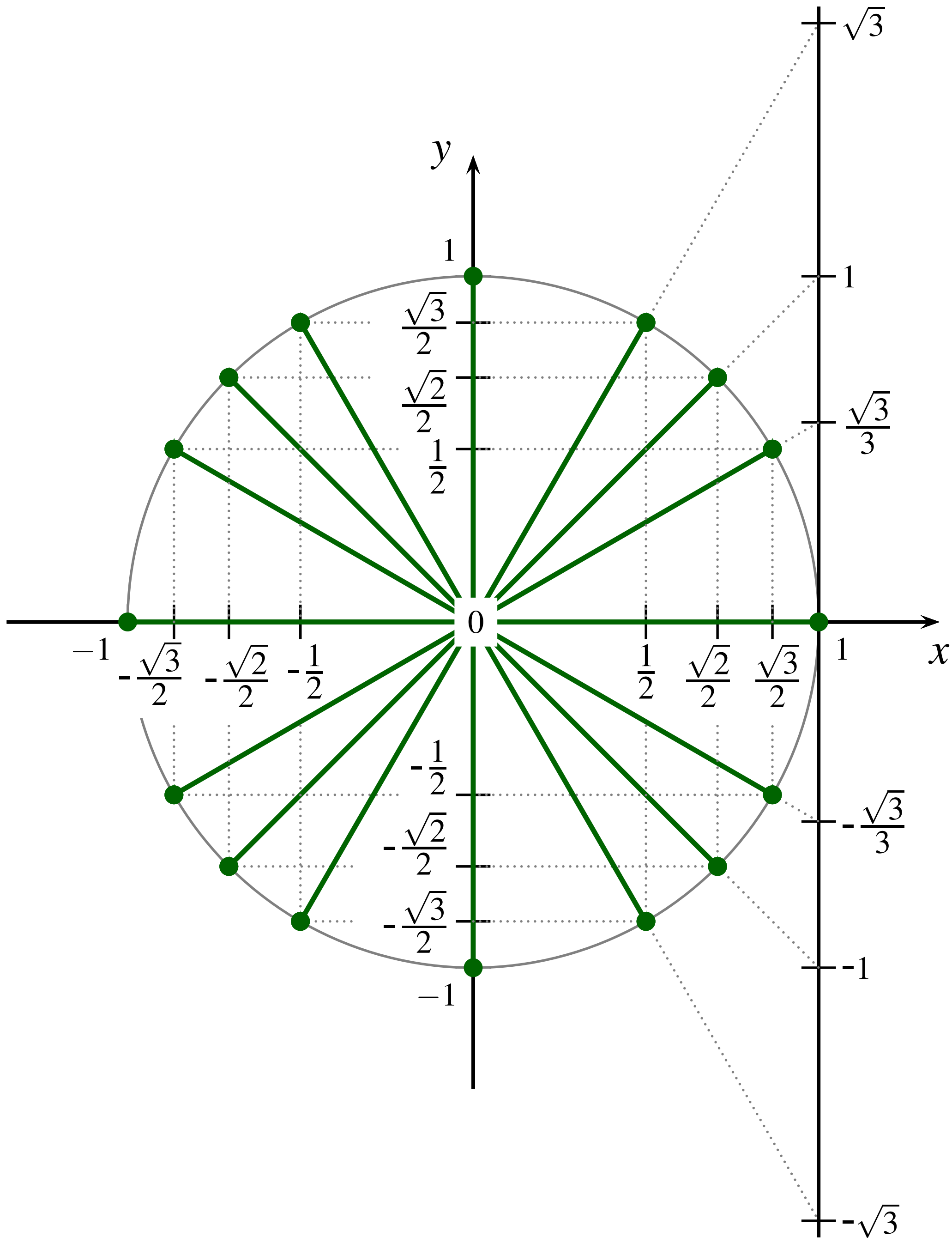
(e) $\cot(90° - \alpha) = \dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

GONIOMETRIE 18

SINUS, COSINUS EN TANGENS VAN ANDERE GEORIËNTEERDE HOEKEN

Met formules voor verwante hoeken kennen we nu ook exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van heel wat andere georiënteerde hoeken.

Onthouden met inzicht kan door de georiënteerde hoeken voor te stellen.



VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Notaties in een driehoek

ΔABC	driehoek met hoekpunten A, B en C
a, b, c	lengte van de zijde tegenover hoekpunt A of B of C
α, β, γ	binnenhoek horend bij hoekpunt A of B of C
opp. ΔABC	oppervlakte van ΔABC

Gelijkvormige driehoeken

$\sim$	... is gelijkvormig met ...	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
HH	gelijkvormigheidskenmerk	
$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\mathrm{H}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}$	gelijkvormigheidskenmerk	
$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}$	gelijkvormigheidskenmerk	

Congruente driehoeken

$\cong$	... is congruent met ...	$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
HZH	congruentiekenmerk	
HHZ	congruentiekenmerk	
ZHZ	congruentiekenmerk	
ZZZ	congruentiekenmerk	

DRIEHOEKSMEETKUNDE 1

DRIEHOEKEN VOORSTELLEN

Beschouw drie verschillende punten A, B en C die niet collineair zijn: niet op één rechte lijn liggen. De notatie

$$\Delta ABC \text{ betekent: driehoek met hoekpunten } A, B \text{ en } C.$$

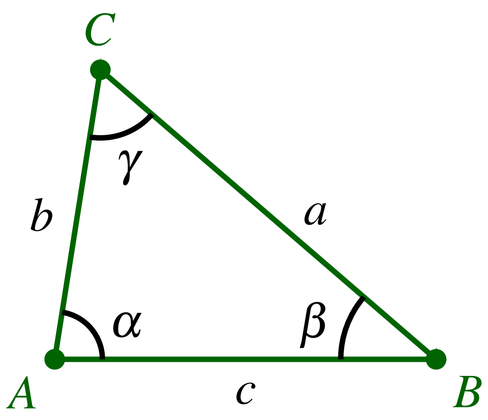
De lengte van de zijde tegenover hoekpunt A noteren we met a, en idem voor de andere hoekpunten:

$$a = |BC| \quad \text{en} \quad b = |CA| \quad \text{en} \quad c = |AB|\,.$$

De binnenhoek $\widehat{A}$ noteren we met de Griekse letter α, en idem voor de andere binnenhoeken:

$$\alpha = \widehat{A} \quad \text{en} \quad \beta = \widehat{B} \quad \text{en} \quad \gamma = \widehat{C}.$$

Samengevat:



Een driehoek is rechthoekig als één van de binnenhoeken als hoekwaarde 90° heeft.

Een driehoek is gelijkbenig als minstens twee van de zijden dezelfde lengte hebben.

Een driehoek is gelijkzijdig als de drie zijden dezelfde lengte hebben.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 2

GELIJKVORMIGE FIGUREN

Twee figuren F en F' zijn gelijkvormig als ze kunnen samenvallen na een combinatie van verschuiven, draaien, spiegelen en herschalen. In dat geval schrijven we

$$F \sim F'.$$

Bij herschalen (vergroten of verkleinen) is de schaalfactor in alle richtingen hetzelfde. Dat getal wordt de gelijkvormigheidsfactor k genoemd:

- $\triangleright$ als $k > 1$ dan is figuur F' groter dan figuur F,
- $\triangleright$ als $k = 1$ dan is figuur F' even groot als figuur F,
- $\triangleright$ als $0 < k < 1$ dan is figuur F' even groot als figuur F.

Bij gelijkvormige veelhoeken is de verhouding tussen overeenkomstige zijden gelijk aan k. Meer algemeen geldt in het vlak en/of in de ruimte:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{omtrek } F' &= k \times \text{ omtrek } F \\ \text{opp. } F' &= k^2 \times \text{ opp. } F \\ \text{vol. } F' &= k^3 \times \text{ vol. } F \end{aligned}}$$

Voorbeelden

(a) Alle vierkanten zijn gelijkvormig.

(b) Niet alle rechthoeken zijn gelijkvormig.

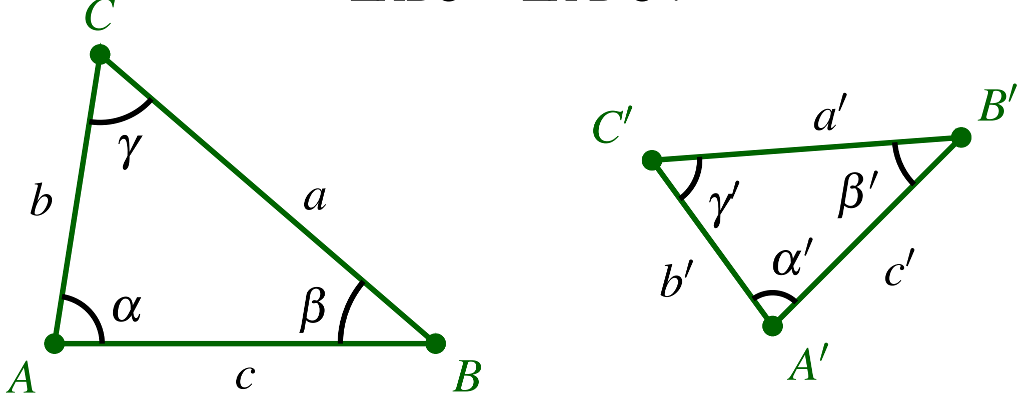
(c) Alle cirkels zijn gelijkvormig, zodat voor elke cirkel de verhouding tussen omtrek en diameter $2r$ steeds hetzelfde getal is. Dit getal noemen we de cirkelconstante pi, genoteerd met Griekse letter π. Bijgevolg is de omtrek van een cirkel met straal r gelijk aan $2\pi r$.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 3

GELIJKVORMIGE DRIEHOEKEN

Driehoeken ABC en $A'B'C'$ zijn gelijkvormig als ze kunnen samenvallen na een combinatie van verschuiven, draaien, spiegelen en herschalen. Als daarbij A met A', B met B' en C met C' samenvalt, schrijven we

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$



Dat is zo als voldaan is aan één van de gelijkvormigheidskenmerken:

(1) twee paar overeenkomstige binnenhoeken zijn gelijk

$$\mathrm{HH}\begin{cases}\alpha=\alpha'\\ \beta=\beta'\end{cases}$$

(2) twee paar overeenkomstige zijden zijn evenredig en hun ingesloten binnenhoeken zijn gelijk

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\mathrm{H}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\begin{cases}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\\ \gamma=\gamma'\end{cases}$$

(3) drie paar overeenkomstige zijden zijn evenredig

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\left\{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.\right.$$

Als voldaan is aan één kenmerk, is ook voldaan aan de twee andere. De gelijkvormigheidsfactor is de verhouding tussen overeenkomstige zijden. Merk op dat $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$ geen gelijkvormigheidskenmerk is.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 4

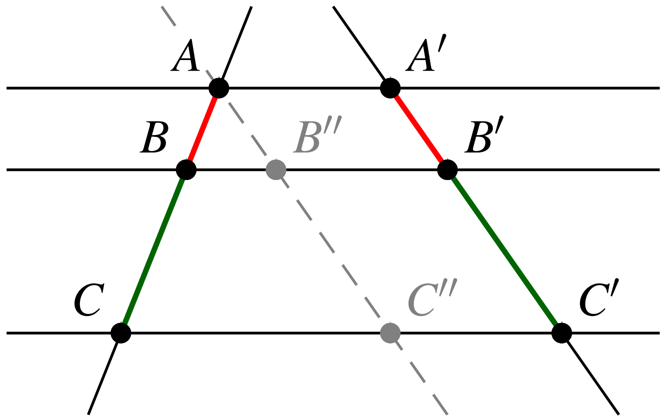
STELLING VAN THALES

Als drie rechten onderling parallel zijn, dan is voor elke snijlijn de verhouding tussen de afgesneden lijnstukken hetzelfde.

Meer algemeen is voor elke drie verschillende rechten AA', BB' en CC'

$$\boxed{AA' \mathbin{/\!/} BB' \mathbin{/\!/} CC' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}}$$

Je kan dit inzien aan de hand van gelijkvormige driehoeken. Eerst teken je een derde snijlijn door A die evenwijdig is met de snijlijn $A'C'$.



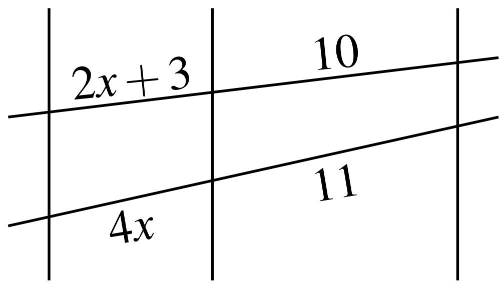
$$\Delta ACC'' \sim \Delta ABB'' \quad \Rightarrow \quad \frac{|AB| + |BC|}{|AB|} = \frac{|AB''| + |B''C''|}{|AB''|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B''C''|}{|AB''|} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|}$$

Voorbeeld. De figuur hiernaast toont drie verticale rechten, zodat

$$\frac{4x}{2x+3} = \frac{11}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 40x = 22x + 33$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}.$$

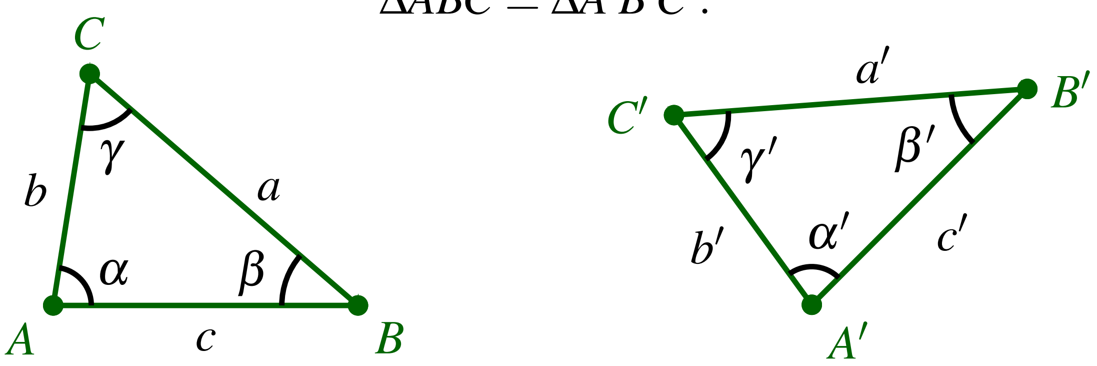


DRIEHOEKSMEETKUNDE 5

CONGRUENTE DRIEHOEKEN

Driehoeken ABC en $A'B'C'$ zijn congruent als ze kunnen samenvallen na een combinatie van verschuiven, draaien en spiegelen. Als daarbij A met A', B met B' en C met C' samenvalt, dan schrijven we

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'.$$



Congruentie betekent gelijkvormigheid met gelijkvormigheidsfactor 1 (geen herschaling). Dat is zo bij één van de congruentiekenmerken:

(1) twee paar overeenkomstige binnenhoeken zijn gelijk en een paar overeenkomstige zijden zijn gelijk

$$\text{HZH}\begin{cases}\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ c = c'\end{cases} \quad \text{of} \quad \text{HHZ}\begin{cases}\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ a = a'\end{cases}$$

(2) twee paar overeenkomstige zijden zijn gelijk en hun ingesloten binnenhoeken zijn gelijk

$$\text{ZHZ}\begin{cases}a = a' \\ b = b' \\ \gamma = \gamma'\end{cases}$$

(3) drie paar overeenkomstige zijden zijn gelijk

$$\text{ZZZ}\begin{cases}a = a' \\ b = b' \\ c = c'.\end{cases}$$

Als voldaan is aan één kenmerk, is ook voldaan aan de twee andere.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 6

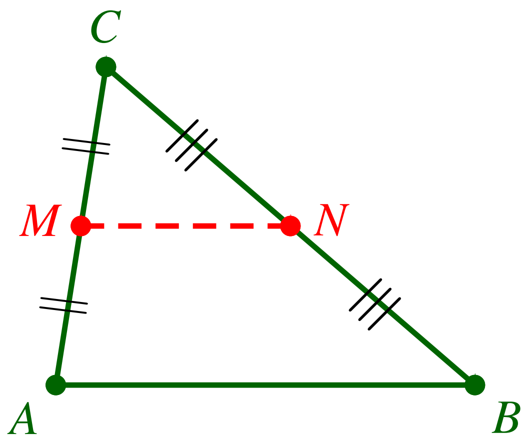
MERKWAARDIGE LIJNSTUKKEN VAN EEN DRIEHOEK

Een middenparallel van een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden met elkaar verbindt.

Elke middenparallel is evenwijdig met de derde zijde en de lengte is de helft van die derde zijde.

$$MN \,/\!/\, AB$$

$$|MN| = \frac{1}{2}\,|AB|$$

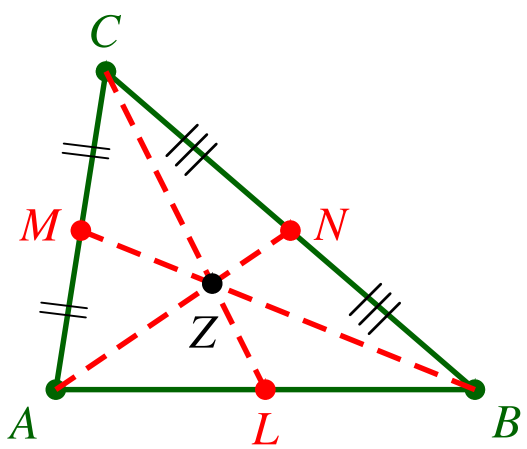


Een zwaartelijn(stuk) van een driehoek is een lijnstuk begrensd door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde.

De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt Z. Dat is het zwaartepunt van de driehoek.

De afstand van Z tot een hoekpunt is het dubbel van de afstand van Z tot de overstaande zijde, en bijgevolg twee derden van de afstand van dat hoekpunt tot de overstaande zijde.

$$|AZ| = 2\,|ZN| = \frac{2}{3}\,|AN|$$



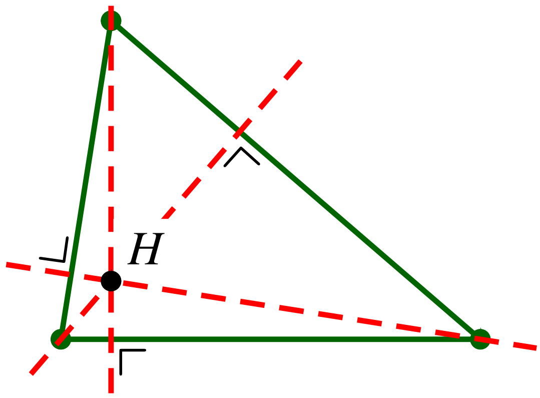
Het bijvoegelijk naamwoord *merkwaardig* betekent in deze context niet zozeer *eigenaardig*, maar wel *noemenswaardig* of *het opmerken waard*.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 7

MERKWAARDIGE LIJNEN VAN EEN DRIEHOEK

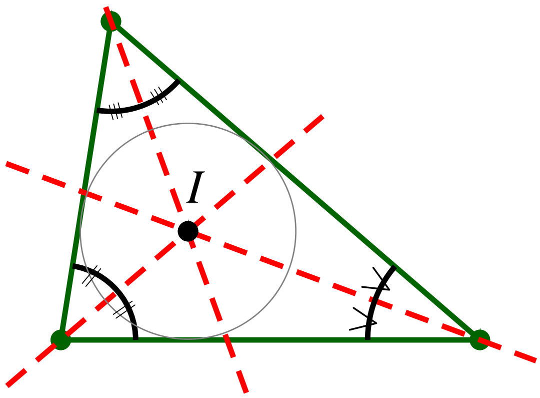
Een hoogtelijn van een driehoek is een rechte door een hoekpunt dat loodrecht op de overstaande zijde staat.

De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt H. Dat is het hoogtepunt van de driehoek.



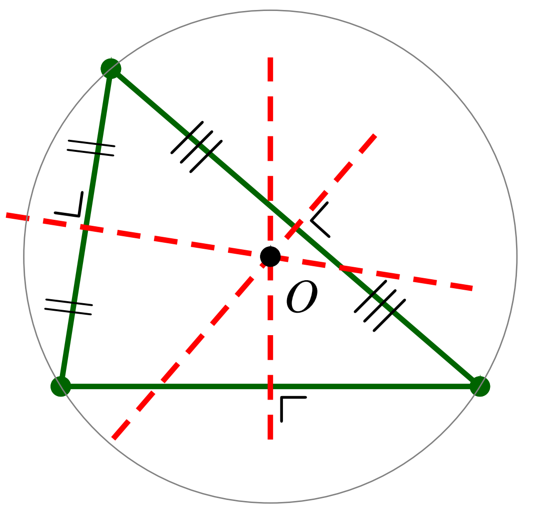
Een bissectice (of deellijn) van een hoek is een rechte die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.

De drie bissectrices van (de binnenhoeken van) een driehoek gaan door één punt I, dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel is. Dat is de cirkel die raakt aan de drie zijden van de driehoek.



Een middelloodlijn van een lijnstuk is de rechte die door het midden van dat lijnstuk gaat en loodrecht op dat lijnstuk staat.

De drie middelloodlijnen van (de zijden van) een driehoek gaan door één punt O, dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel is. Dat is de cirkel die gaat door de drie hoekpunten van de driehoek.



DRIEHOEKSMEETKUNDE 8

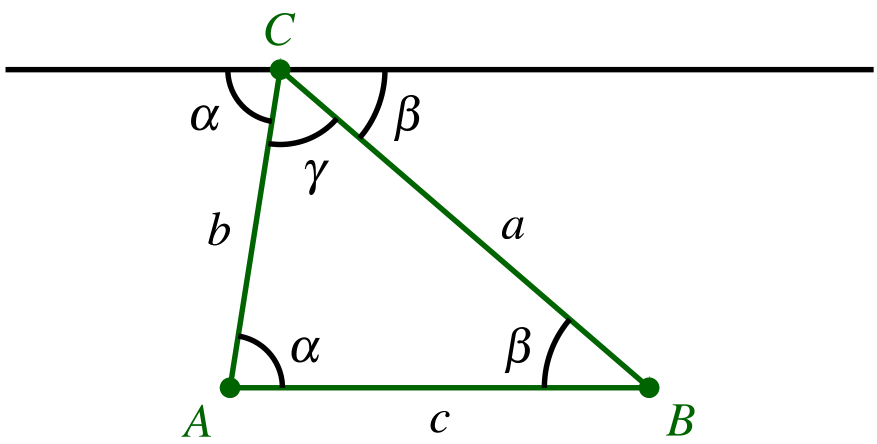
SOM VAN DE BINNENHOEKEN

In elke driehoek ABC is de som van de binnenhoeken gelijk aan de gestrekte hoek:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=180^\circ}$$

Omgekeerd: als $\alpha,\beta,\gamma\in\,]0^\circ,180^\circ[$ met $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, dan bestaat er een driehoek waarvan de binnenhoeken α, β en γ zijn.

Bewijs zonder woorden.



□

Twee driehoeken met dezelfde binnenhoeken zijn gelijkvormig.
Een driehoek is dus niet volledig bepaald door de binnenhoeken.

Voorbeelden

(a) Als $\alpha=120^\circ$ en $\beta=45^\circ$ dan is

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma=180^\circ-\alpha-\beta=15^\circ.$$

(b) Als $\beta=21^\circ$ en $\gamma\approx 38^\circ\,12'7,31''$ dan is

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-21^\circ-38^\circ\,12'7,3\ldots''\approx 120^\circ\,47'52,7.$$

(c) Er bestaat een driehoek ABC met $\alpha=37^\circ$, $\beta=68^\circ$ en $\gamma=75^\circ$.

(d) Er bestaat geen driehoek ABC met $\alpha=37^\circ$, $\beta=68^\circ$ en $\gamma=76^\circ$.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 9

DRIEHOEKSONGELIJKHEID

In elke driehoek ABC is elke zijde korter dan de som van de lengtes van de andere zijden:

$$\boxed{a < b + c \quad \text{en} \quad b < c + a \quad \text{en} \quad c < a + b}$$

Omgekeerd: als $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ met $a < b + c$, $b < c + a$ en $c < a + b$, dan bestaat er een driehoek waarvan de zijden als lengte a, b en c hebben.

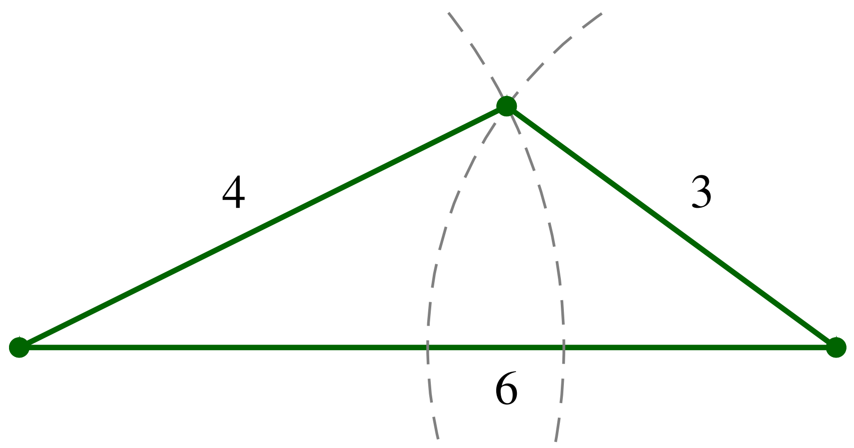
Twee driehoeken met gelijke zijden zijn congruent.
Een driehoek is dus volledig bepaald door de lengtes van de zijden.

Voorbeelden

(a) Er bestaat een driehoek waarvan de lengtes van de zijden 4 cm, 3 cm en 6 cm zijn, want

$$4 < 3 + 6 \quad \text{en} \quad 3 < 6 + 4 \quad \text{en} \quad 6 < 4 + 3.$$

Zo'n driehoek kun je tekenen met behulp van een passer.



(b) Er bestaat geen driehoek waarvan de lengtes van de zijden 4 cm, 3 cm en 7 cm zijn, want $7 \not< 4 + 3$.

DRIEHOEKSMEETKUNDE 10

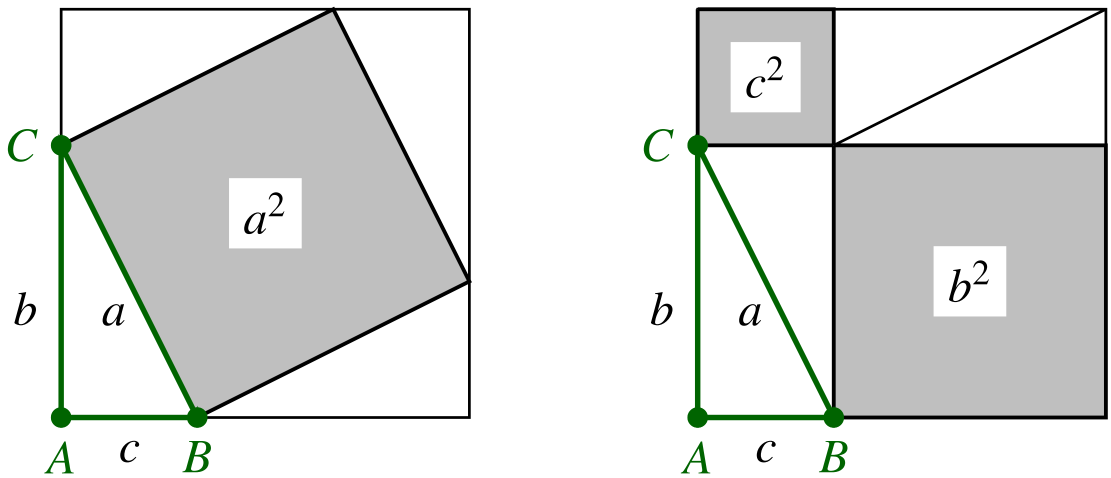
STELLING VAN PYTHAGORAS

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechtshoekszijden.

Meer algemeen geldt voor elke driehoek ABC:

$$\boxed{\Delta ABC \text{ is rechthoekig in hoekpunt } A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2}$$

Bewijs zonder woorden.



$\square$

Voorbeelden

(a) Drie stokken hebben een lengte van 30 cm, 40 cm en 50 cm. Als je met die stokken een driehoek maakt, is die driehoek rechthoekig, want
$$50^2 = 30^2 + 40^2.$$

(b) Een driehoek met zijden 28, 45 en 52 is niet rechthoekig, want
$$52^2 \neq 28^2 + 45^2.$$

(c) Als ΔABC rechthoekig is met schuine zijde $a = 6$ en rechthoekszijde $b = 3$, dan kunnen we de andere rechthoekszijde c berekenen:
$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27 \quad \text{zodat} \quad c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

DRIEHOEKSMEETKUNDE 11

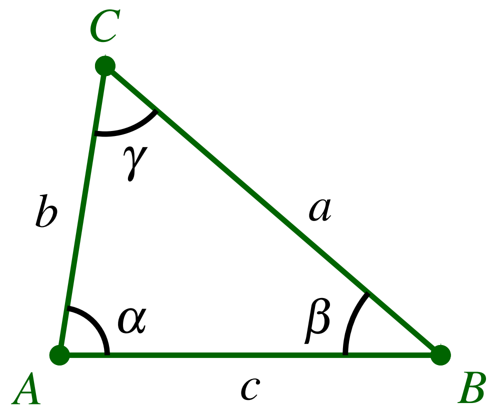
SINUSREGEL

Formule voor de oppervlakte van een ΔABC drie keer toegepassen geeft

$$\text{opp. } \Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ca \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Dus in elke ΔABC zijn de zijden evenredig met sinussen van overstaande binnenhoeken:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$



Is HZH gegeven: altijd 1 mogelijkheid.
Is ZZH gegeven: soms 2 mogelijkheden.

Voorbeelden

(a) HZH gegeven: $\beta = 120°$, $a = 5$ en $\gamma = 30°$

- ▷ som van de binnenhoeken: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 30°$
- ▷ driehoek is gelijkbenig want $\beta = \gamma$, zodat $c = a = 5$
- ▷ sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = 5\sqrt{3}$

(b) ZZZ gegeven: $a = 8\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$ en $\alpha = 43°$

- ▷ sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = 0,8524\ldots$

1e optie: $\beta \approx 58°\,29'\,4''$, dan $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 78°\,30'\,56''$

- ▷ sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 11,50\,\text{cm}$

2e optie: $\beta \approx 121°\,30'\,56''$, dan $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 15°\,29'\,4''$

- ▷ sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 3,13\,\text{cm}$

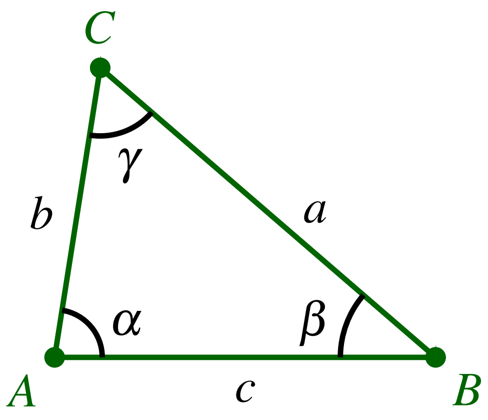
DRIEHOEKSMEETKUNDE 12

COSINUSREGEL

In een ΔABC met $\alpha = 90^\circ$ geldt dat $a^2 = b^2 + c^2$ (stelling van Pythagoras).

Voor een willekeurige ΔABC is

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$



Is ZZZ gegeven: altijd 1 mogelijkheid.
Is ZHZ gegeven: altijd 1 mogelijkheid.

Voorbeelden

(a) ZZZ gegeven: $a = 3\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ en $c = 7\,\text{cm}$

▷ cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = 0,9285\ldots$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 21^\circ\,47'\,12''$$

▷ cosinusregel: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = 0,7857\ldots$$

$$\Rightarrow \beta \approx 38^\circ\,12'\,48''$$

▷ som van de binnenhoeken: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 120^\circ$

(b) ZHZ gegeven: $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$ en $c = 7$

▷ cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\Rightarrow a = \sqrt{149 - 70\sqrt{2}}$$

▷ cosinusregel: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \;\Rightarrow\; \beta \approx 90^\circ\,34'\,33''$

▷ som van de binnenhoeken: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 44^\circ\,25'\,27''$

VERGELIJKINGEN 1

VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

Een vergelijking is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{\square = \triangle}$$

waarbij $\square$ en $\triangle$ bestaan uit reële getallen, letters (onbekenden) en bewerkingen. Als er één onbekende is, gebruiken we vaak letter x.

Een oplossing van de vergelijking is een getal waarbij de uitspraak $\square = \triangle$ waar is als we de onbekende x door dat getal vervangen.

Een vergelijking oplossen betekent alle oplossingen van ervan bepalen.

Passen we bij een vergelijking operaties (1) en (2) toe, dan wijzigt de oplossingsverzameling niet, wat we uitdrukken met equivalentie $\Leftrightarrow$:

(1) beide leden plus of min eenzelfde getal of eenzelfde lettervorm;

(2) beide leden maal of gedeeld door eenzelfde getal dat niet 0 is.

Door deze operaties doordacht toe te passen, kunnen we een vergelijking eenvoudiger maken en op die manier alle oplossingen vinden.

Product is nul betekent dat minstens één van de factoren nul is. Ontbinden in factoren is dus een strategie om vergelijkingen op te lossen:

$$\boxed{\square \cdot \triangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square = 0 \text{ of } \triangle = 0}$$

Voorbeelden

(a)
$$\begin{aligned} & 2x - 5 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 5 + 5 = 3 + 5 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 8 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \end{aligned}$$

controle: $2 \cdot 4 - 5 \stackrel{!}{=} 3$

(b)
$$\begin{aligned} & x^2 = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \quad \text{of} \quad x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \quad \text{of} \quad x = 1 \end{aligned}$$

oplossingsverz. $V = \{0, 1\}$

VERGELIJKINGEN 2

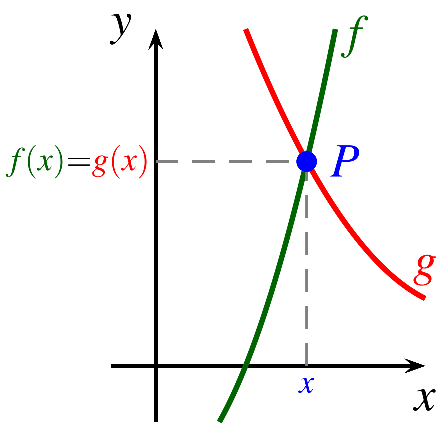
GRAFISCHE BETEKENIS

Een vergelijking in één onbekende x is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{\square = \triangle}$$

waarbij $\square$ en $\triangle$ bestaan uit reële getallen, de letter x en bewerkingen.

Je kan het linkerlid $\square$ opvatten als het voorschrift van een functie f, en het rechterlid $\triangle$ als dat van een functie g.



Bij die functies f en g horen dan grafieken die je in één assenstelsel kan voorstellen.

Door alle snijpunten van graf f en graf g te bepalen, kun je de vergelijking oplossen:

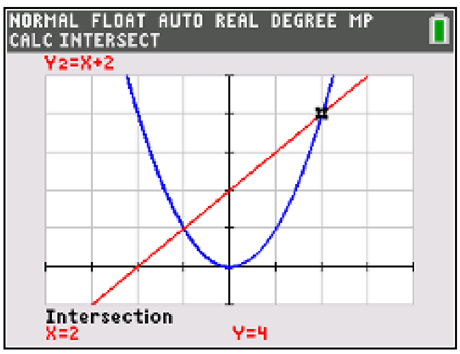
$$\boxed{\text{in een } x\text{-waarde snijdt graf } f \text{ met graf } g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)}$$

Op die manier kun je elke vergelijking (bij benadering) oplossen met behulp van een grafische rekenmachine of computermeetkundepakket.

Voorbeeld. Om de vergelijking

$$x^2 = x + 2$$

grafisch op te lossen, plotten we de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ samen met de grafiek van de functie $g(x) = x + 2$ en lezen we de snijpunten af.



Hun x-coördinaten zijn dan de oplossingen van de vergelijking:

$$x^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \ \text{ of } \ x = 2.$$

VERGELIJKINGEN 3

EERSTEGRAADSVERGELIJKINGEN

Een eerstegraadsvergelijking (of lineaire vergelijking) in x is een vergelijking die kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\boxed{ax + b = 0 \quad \text{waarbij } a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

Elke eerstegraadsvergelijking heeft precies één oplossing, die je vindt door de termen met x naar één lid te brengen, beide leden te delen door de coëfficiënt van x en nadien te vereenvoudigen als dat mogelijk is:

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Voorbeelden

(a) $3x - 11 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 21$

$\Leftrightarrow \quad x = 7 \qquad$ oplossingsverzameling $V = \{7\}$

controle door invullen: $3 \cdot 7 - 11 \stackrel{!}{=} 10$

(b) $\frac{1}{3} + 5x = 7x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 15x = 21x + 15$

$\Leftrightarrow \quad -6x = 14$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3} \qquad$ opl.verz. $V = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

(c) $\quad 6(\sqrt{3}t + 5) - 10(3 - \sqrt{12}t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6\sqrt{3}t + 30 - 30 + 10 \cdot 2\sqrt{3}t = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{0}{26\sqrt{3}} = 0 \qquad$ oplossingsverzameling $V = \{0\}$

VERGELIJKINGEN 4

TWEEDEGRAADSVERGELIJKINGEN

Een tweedegraadsvergelijking (of kwadratische vergelijking) in x is een vergelijking die kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \quad \text{waarbij } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

Als $b=0$ of $c=0$, spreken we over een onvolledige tweedegraadsvergelijking. Die kunnen we meteen oplossen. Dat is ook het geval bij volledige tweedegraadsvergelijkingen van de vorm

$$(\ldots x+\ldots)(\ldots x+\ldots)=0 \qquad \text{of} \qquad (\ldots x+\ldots)^2=\ldots$$

Voorbeelden

(a)
$$\begin{aligned}
& 2x^2 = x \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(2x-1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x=0 \text{ of } 2x-1=0 \\
\Leftrightarrow\ & x=0 \text{ of } x=\frac{1}{2}=0,5
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
& x^2+4=0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-4}_{<0}
\end{aligned}$$

geen (reële) oplossingen

opl.verzameling $V=\emptyset$

(c)
$$\begin{aligned}
& (3t-1)^2 = 2 \\
\Leftrightarrow\ & 3t-1=\sqrt{2} \quad \text{of} \quad 3t-1=-\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & 3t=1+\sqrt{2} \quad \text{of} \quad 3t=1-\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & t=\frac{1+\sqrt{2}}{3} \quad \text{of} \quad t=\frac{1-\sqrt{2}}{3} \\
\Leftrightarrow\ & t=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

VERGELIJKINGEN 5

DE *abc*-FORMULE

De algemene manier om de reële oplossingen van een tweedegraadsvergelijking $ax^2+bx+c=0$ te vinden is de *abc*-formule (of wortelformule):

Bereken de discriminant $D = b^2 - 4ac$

- $\triangleright$ als $D < 0$: geen oplossingen
- $\triangleright$ als $D = 0$: één oplossing, namelijk $x = -\dfrac{b}{2a}$
- $\triangleright$ als $D > 0$: twee oplossingen, namelijk

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Voorbeelden

(a) $(3x-5)^2 = 7-48x$

$\Leftrightarrow \quad 9x^2+18x+18=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+2x+2=0$

$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 < 0$
geen oplossingen

opl.verzameling $V = \{\}$

(b) $25x^2-30x+9=0$

$D = (-30)^2 - 4\cdot 25\cdot 9 = 0$
één oplossing

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-(-30)}{2\cdot 25} = \dfrac{3}{5}$

(c) $-5x^2+4x+3=0$

$D = 4^2 - 4\cdot(-5)\cdot 3 = 76 > 0$
twee oplossingen

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-4\pm\sqrt{76}}{2\cdot(-5)}$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-4\pm 2\sqrt{19}}{-10} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \dfrac{2-\sqrt{19}}{5}$ en $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{19}}{5}$

VERGELIJKINGEN 6

SOM EN PRODUCT

Kennen we twee getallen x_1 en x_2, dan is elke tweedegraadsvergelijking waarvan x_1 en x_2 oplossingen zijn van de vorm

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax^2-\underbrace{a(x_1+x_2)}_{-b}x+\underbrace{ax_1x_2}_{c}=0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de eigenschap som en product: voor elke tweedegraadsvergelijking $ax^2+bx+c=0$ en elke $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ willekeurig geldt:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \text{ en } x_2 \text{ zijn de oplossingen van } ax^2+bx+c=0 \\ \Updownarrow \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \quad \text{en} \quad x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{array}}$$

Voorbeeld. We lossen de tweedegraadsvergelijking $-x^2-x+12=0$ op met de eigenschap som en product.

$$\begin{aligned} & x_1 \text{ en } x_2 \text{ zijn de oplossingen van } -x^2-x+12=0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{en} \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1+x_2=-1 \quad \text{en} \quad x_1\cdot x_2=-12 \end{aligned}$$

maak koppels met product -12 :

1	−1	2	−2	**3**	−3
−12	12	−6	6	**−4**	4

$$\Leftrightarrow\quad x_1=3 \quad \text{en} \quad x_2=-4$$

VERGELIJKINGEN 7

BIKWADRATISCHE VERGELIJKINGEN

Een bikwadratische vergelijking in x is een vergelijking die kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{waarbij } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

Om zo'n vergelijking op te lossen, voer je een hulponbekende in:

$$\boxed{\text{noem } t = x^2 \text{ en los de vergelijking } at^2 + bt + c = 0 \text{ op}}$$

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
& 9x^4 + 23x^2 - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 9\left(x^2\right)^2 + 23x^2 - 12 = 0 \\
& \boxed{\text{noem } t = x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & 9t^2 + 23t - 12 = 0 \\
& \boxed{D = 23^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-12) = 961 = 31^2} \\
\Leftrightarrow\quad & t = \frac{-23 \pm 31}{18} \\
\Leftrightarrow\quad & t = \frac{4}{9} \quad \text{of} \quad t = -3 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 = \frac{4}{9} \quad \text{of} \quad x^2 = -3 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{2}{3} \quad \text{of} \quad x = -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

ONGELIJKHEDEN 1

ONGELIJKHEDEN OPLOSSEN

Een ongelijkheid is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{\square \leq \triangle \quad \text{of} \quad \square < \triangle \quad \text{of} \quad \square \geq \triangle \quad \text{of} \quad \square > \triangle}$$

waarbij $\square$ en $\triangle$ bestaan uit reële getallen, letters (onbekenden) en bewerkingen. Als er één onbekende is, gebruiken we vaak letter x.

Een oplossing van de ongelijkheid $\square \leq \triangle$ is een getal waarbij de uitspraak $\square \leq \triangle$ waar is als we de onbekende x door dat getal vervangen.

Een ongelijkheid oplossen betekent: alle oplossingen ervan bepalen.

Passen we bij een ongelijkheid operaties (1) en (2) toe, dan wijzigt de oplossingsverzameling niet, wat we uitdrukken met equivalentie $\Leftrightarrow$:

(1) beide leden plus of min eenzelfde getal of eenzelfde lettervorm;

(2) beide leden maal of gedeeld door eenzelfde strikt positief getal.

Neem je tegengestelde van beide leden, dan verandert $\leq$ in $\geq$ en $<$ in $>$. Zo is $2 < 3$ terwijl $-2 > -3$. De ongelijkheid wijzigt dus bij operatie

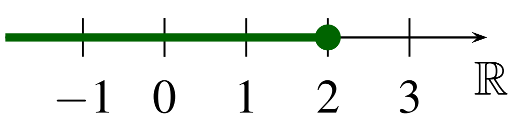
(3) beide leden maal of gedeeld door eenzelfde strikt negatief getal.

Je kan de oplossingsverzameling steeds voorstellen op een getallenas.

Voorbeelden

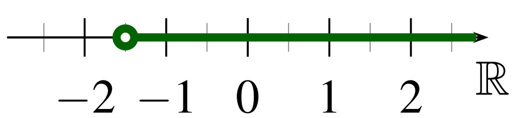
(a)
$$\begin{aligned} & x-2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x-2+2 \leq 0+2 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq 2 \end{aligned}$$

opl.verz. $V = \left]-\infty, 2\right]$



(b)
$$\begin{aligned} & -2x < 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-2x}{-2} > \frac{3}{-2} \\ \Leftrightarrow\ & x > -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

opl.verz. $V = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$



ONGELIJKHEDEN 2

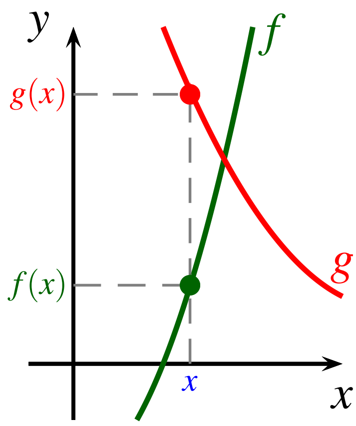
GRAFISCHE BETEKENIS

Een ongelijkheid in één onbekende x is een uitdrukking van de vorm

$$\square \leq \triangle \quad \text{of} \quad \square \geq \triangle \quad \text{of} \quad \square < \triangle \quad \text{of} \quad \square > \triangle$$

waarbij $\square$ en $\triangle$ bestaan uit reële getallen, de letter x en bewerkingen.

Je kan het linkerlid $\square$ opvatten als het voorschrift van een functie f, en het rechterlid $\triangle$ als dat van een functie g.



Bij die functies f en g horen dan grafieken die je in één assenstelsel kan voorstellen.

Door alle snijpunten van graf f en graf g te bepalen, kun je de ongelijkheid oplossen:

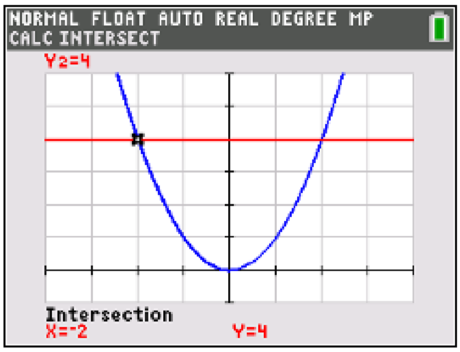
$$\boxed{\text{in een } x\text{-waarde ligt graf } f \text{ onder graf } g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x)}$$

Op die manier kun je elke ongelijkheid (bij benadering) oplossen met behulp van een grafische rekenmachine of computermeetkundepakket.

Voorbeeld. Om de ongelijkheid

$$x^2 < 4$$

grafisch op te lossen, plotten we de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ samen met de grafiek van de functie $g(x) = 4$ en lezen we de snijpunten af.



De oplossingen van de ongelijkheid zijn dan precies de x-waarden waar de grafiek van f onder de grafiek van g ligt:

$$\begin{aligned} x^2 < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 < x < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \,]-2, 2[\,. \end{aligned}$$

ONGELIJKHEDEN 3

EERSTEGRAADSONGELIJKHEDEN

Een eerstegraadsongelijkheid (of lineaire ongelijkheid) in x is een ongelijkheid die kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\boxed{\begin{array}{ll} ax+b \leq 0 \ \text{ of } \ ax+b<0 & \\ & \text{waarbij } a,b \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0 \\ ax+b \geq 0 \ \text{ of } \ ax+b>0 & \end{array}}$$

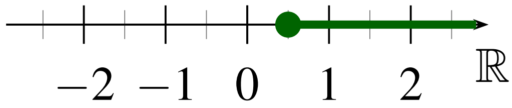
Die los je als volgt op: termen met x naar linkerlid; termen zonder x naar rechterlid; beide leden delen door coëfficiënt van x; vereenvoudigen.

Voorbeelden

(a) $20-3x \leq 7x+15 \quad \Leftrightarrow \quad -10x+5 \leq 0$ eerstegraadsongel.

$\Leftrightarrow \quad -10x \leq -5$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{1}{2}$ opl.verz. $V = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$



(b) $\sqrt{2}x+3 < \sqrt{3}x \ \Leftrightarrow \ (\sqrt{2}-\sqrt{3})x < -3$ eerstegraadsongel.

$\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(c) $2x+1 \geq 2x-1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq 0$ geen eerstegraadsongel.

voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $2 \geq 0$ dus opl.verz. $V = \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{4x-5}{6} > -\dfrac{x}{3} \ \Leftrightarrow \ 2(x+2)-(4x-5) < -2x$

$\Leftrightarrow \quad 9 < 0$ geen eerstegraadsongel.

voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $9 \not< 0$ dus geen oplossingen, opl.verz. $V = \emptyset$

ONGELIJKHEDEN 4

TWEEDEGRAADSONGELIJKHEDEN

Een tweedegraadsongelijkheid (of kwadratische ongelijkheid) in x is een ongelijkheid die kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2+bx+c \leq 0 \ \text{ of } \ ax^2+bx+c<0 \\ ax^2+bx+c \geq 0 \ \text{ of } \ ax^2+bx+c>0 \end{array} \quad \text{waarbij } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

Zo'n tweedegraadsongelijkheid kun je niet zomaar oplossen door alle termen met x naar één lid te brengen. Zo is bijvoorbeeld

$$x^2<4 \quad \not\Leftrightarrow \quad x<2 \qquad \text{want } \ -7<2 \ \text{ terwijl } \ (-7)^2>4.$$

Een tweedegraadsongelijkheid algebraïsch oplossen doe je met de volgende, algemene werkwijze om elke ongelijkheid op te lossen:

> **Stap 1.** Breng alle termen over naar het linkerlid
>
> **Stap 2.** Het linkerlid is het voorschrift van een functie h
>
> **Stap 3.** Maak een tekentabel van de functie h

Voorbeeld. We lossen de ongelijkheid $x^2<4$ algebraïsch op.

$$x^2<4 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2-4}_{\text{noem } h(x)} <0$$

Maak tekentabel van $h(x)=x^2-4$

▷ nulwaarden: $h(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0$

$\Leftrightarrow x=2$ of $x=-2$

▷ tekentabel:

x		-2		2	
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \,]-2,2[$$

STELSELS 1

STELSELS OPLOSSEN

Een stelsel is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{\begin{cases} \square = \triangle \\ \diamondsuit = \triangleright \\ \quad\vdots \end{cases}}$$

waarbij elke regel staat voor een vergelijking. Als er in totaal twee onbekenden zijn, gebruiken we vaak de letters x en y.

Een oplossing van het stelsel is een koppel van twee reële getallen (a,b) waarbij de uitspraken $\square = \triangle$ en $\diamondsuit = \triangleright$ etc. waar zijn als we de onbekende x door a vervangen en onbekende y door b vervangen.

Een stelsel oplossen betekent alle oplossingen van dat stelsel bepalen.

Passen we bij een stelsel volgende operaties toe, dan wijzigt de oplossingsverzameling niet, wat we uitdrukken met equivalentie $\Leftrightarrow$:

(1) beide leden van een vergelijking plus zelfde getal of lettervorm;

(2) beide leden van een vergelijking maal zelfde getal dat niet 0 is;

(3) een vergelijking gebruiken in een andere vergelijking.

Door deze operaties doordacht toe te passen, kunnen we soms een stelsel eenvoudiger maken en op die manier alle oplossingen vinden.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x+3=y-5 \\ 2y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-8 \\ 2y=3(y-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-8 \\ y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=24 \end{cases}$$

Oplossingsverzameling $V=\{(16,24)\}$. Controle: $\begin{cases} 16+3 \overset{!}{=} 24-5 \\ 2\cdot 24 \overset{!}{=} 3\cdot 16 \end{cases}$

STELSELS 2

2×2 -STELSELS

Een lineair stelsel van twee vergelijkingen in twee onbekenden x en y is een stelsel dat kan geschreven worden in de standaardvorm

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad \text{waarbij } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

In sommige gevallen kun je zo'n stelsel meteen oplossen.

Voorbeelden

(a)
$$\begin{cases} 2x = -8 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ 5 \cdot (-4) - 3y = 13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ -3y = 33 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -11 \end{cases}$$

oplossingsverzameling

$$V = \{(-4, -11)\}$$

controle door invullen:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-4) \stackrel{!}{=} -8 \\ 5 \cdot (-4) - 3 \cdot (-11) \stackrel{!}{=} 13 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2 \cdot 3 = -1 \end{cases}$$

geen oplossingen

opl.verz. $V = \emptyset$

(c)
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x + y = 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 3 - r \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

oneindig veel oplossingen

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 3\}$$
$$= \{(r, 3 - r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

STELSELS 3

GELIJKSTELLINGSMETHODE

Een eerste manier om een 2×2 -stelsel

$$\begin{cases} \ldots x + \ldots y = \ldots & (1) \\ \ldots x + \ldots y = \ldots & (2) \end{cases}$$

op te lossen is de gelijkstellingsmethode.

Stap 1. In vergelijkingen (1) en (2) telkens onbekende x afzonderen
Stap 2. Die twee uitdrukkingen voor x gelijkstellen om y te vinden
Stap 3. Oplossing y invullen in (1) of (2) om x te vinden

Soms is het handiger om in de eerste stap de onbekende y af te zonderen in plaats van de onbekende x.

Voorbeelden

(a) $$\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ x = 18 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ 13 - y = 18 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \text{opl.verz. } V = \{(8,5)\}$$

(b) $$\begin{cases} 5x - y = 8 \\ 13x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 8 \\ y = 1 - 13x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 8 \\ 5x - 8 = 1 - 13x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 8 \\ 18x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{11}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{opl.verz. } V = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)\right\}$$

STELSELS 4

SUBSTITUTIEMETHODE

Een tweede manier om een 2×2 -stelsel

$$\begin{cases} \ldots x + \ldots y = \ldots & (1) \\ \ldots x + \ldots y = \ldots & (2) \end{cases}$$

op te lossen is de substitutiemethode.

Stap 1. In vergelijking (1) de onbekende x afzonderen

Stap 2. Die uitdrukking voor x in vergelijking (2) invullen (substitutie) om zo de onbekende y te vinden

Stap 3. Oplossing y invullen in (1) of (2) om x te vinden

Soms is het handiger om in de eerste stap vergelijking (2) te nemen in plaats van vergelijking (1), of onbekende y af te zonderen in plaats van x.

Voorbeelden

(a) $$\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ 2x + 4y = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ 2(13 - y) = 36 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4(5 - 2x) = 18 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{38}{11} \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{38}{11} \\ y = 5 - 2 \cdot \dfrac{38}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{38}{11} \\ y = -\dfrac{21}{11} \end{cases}$$

STELSELS 5

COMBINATIEMETHODE

De derde en meest algemene manier om een 2×2 -stelsel

$$\begin{cases} \ldots x + \ldots y = \ldots & (1) \\ \ldots x + \ldots y = \ldots & (2) \end{cases}$$

op te lossen is de combinatiemethode.

> **Stap 1.** Vergelijking (1) met een geschikt getal vermenigvuldigen
>
> **Stap 2.** Neem de som of het verschil van de nieuwe vergelijkingen zodat de onbekende x of de onbekende y wegvalt
>
> **Stap 3.** Oplossing voor x of y invullen in (1) of (2) om zo de andere onbekende te vinden

In het algemeen is het handiger om in de eerste stap beide vergelijkingen met een (ander) geschikt getal te vermenigvuldigen.

Voorbeelden

(a) $$\begin{cases} x + y = 13 & \cdot 2 \\ 2x + 4y = 36 & \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x + 2y = 26 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases}}_{\text{verschil: } 2y = 10} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \cdot 3 \\ -3x + 4y = 11 & \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ -6x + 8y = 22 \end{cases}}_{\text{som: } 17y = 34} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

VEELGEBRUIKTE SYMBOLEN

Voorstellen van functies	
$f, g, \ldots$	functies
$f(x)$	functievoorschrift van de functie f
graf f	grafiek van de functie f
$y = f(x)$	vergelijking van de grafiek van de functie f
$\bullet$	volle bol: het punt behoort nog net tot de grafiek
$\circ$	holle bol: het punt behoort net niet tot de grafiek

Kenmerken van functies	
dom f	domein van de functie f
bld f	beeld van de functie f

FUNCTIES 1

FUNCTIES EN FUNCTIEWAARDEN

Een functie f is een verband dat aan elk reëel getal x hoogstens één reëel getal y associeert. We kunnen een functie zien als een machine die bij elke input x ofwel één output heeft, ofwel geen enkele output heeft.

Het feit dat zo'n functie f en een getal x samen een getal y vastleggen, noteren we als $f(x) = y$. We noemen $f(x)$ het functievoorschrift van x. Een andere, meer uitgebreide notatie is

$$\boxed{\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}}$$

Als we voor enkele getallen a de functiewaarde $f(a)$ berekenen, verkrijgen we een tabel van enkele functiewaarden.

Voorbeeld. Een kaars is 15 cm lang. Ze brandt gelijkmatig, en vijf uur later is ze opgebrand. Met elk tijdstip x (in uren) associëren we de lengte van de kaars y (in centimeter). Dit verband is dus een functie f.

Tijdstip $x = 0$ hoort bij de beginsituatie, dus $f(0) = 15$. Voor $x < 0$ hebben we geen gegevens, zodat die functiewaarden niet bestaan.

▷ Tabel van enkele functiewaarden:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	/	15	12	9	6	3	0	0

▷ Functievoorschrift: $f(x) = \begin{cases} 15 - 3x & \text{als } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{als } x > 5 \end{cases}$

▷ De lengte van de kaars na $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ uren is

$$f(\sqrt{2}) = 15 - 3\sqrt{2} = 10,75\ldots \approx 10,8\,\text{cm}.$$

FUNCTIES 2

GRAFIEKEN

De grafiek van een functie f is de verzameling van alle punten P met coördinaat $(x, f(x))$. Die verzameling wordt genoteerd met graf f.

$$\boxed{\text{graf } f = \{P(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } f(x) \text{ bestaat}\}}$$

Als je zo'n grafiek in een assenstelsel tekent of schetst, moet je die ook benoemen. Dat kan met graf f, met $y = f(x)$ of kortweg met f.

De grafiek van een functie is steeds een verzameling van punten in het vlak, kortweg een grafiek genoemd. Het omgekeerde is niet waar: sommige grafieken zijn niet de grafiek van een functie omdat er bij sommige x-waarden meerdere y-waarden horen.

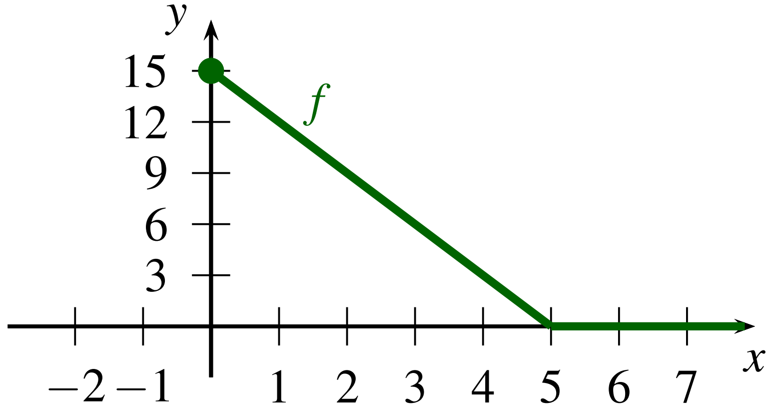
Waar een grafiek (plaatselijk) stopt, tekenen we ofwel een $\bullet$ ofwel een $\circ$:

een volle bol $\bullet$ betekent: het punt behoort nog net tot de grafiek;
een holle bol $\circ$ betekent: het punt behoort net niet tot de grafiek.

Als een grafiek het assenstelsel verlaat en we daar geen volle of holle bol tekenen, maken we daarmee duidelijk dat de grafiek zich ook buiten het assenstelsel voortzet op de manier die geïnsinueerd wordt.

Voorbeeld. Een kaars is 15 cm lang. Ze brandt gelijkmatig, en vijf uur later is ze opgebrand. Met elk tijdstip x (in uren) associëren we de lengte van de kaars y (in centimeter). Dit verband is dus een functie f.

▷ Grafiek:



FUNCTIES 3

DOMEIN EN BEELD

Het domein van een functie f is de verzameling van alle x-waarden waarbij er een y-waarde hoort. Die verzameling noteren we met $\operatorname{dom} f$.

$$\boxed{\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ bestaat}\}}$$

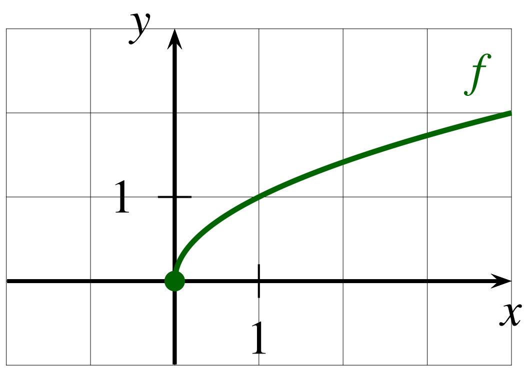
Meetkundige betekenis: loodrechte projectie van grafiek van f op x-as.

Het beeld van een functie f is de verzameling van alle y-waarden waarbij er een x-waarde hoort. Die verzameling noteren we met $\operatorname{bld} f$.

$$\boxed{\operatorname{bld} f = \{f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\}}$$

Meetkundige betekenis: loodrechte projectie van grafiek van f op y-as.

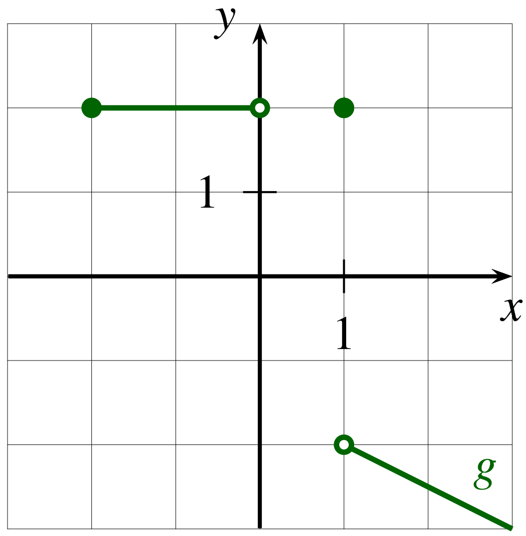
Voorbeeld 1. $f(x) = \sqrt{x}$



Algebraïsch bepalen van domein:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} f &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \text{ bestaat}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\
&= \mathbb{R}^+ \\
&= [0, +\infty[.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2. De grafiek hiernaast is de grafiek van een functie g, want bij elke x-waarde hoort hoogstens één y-waarde.



We lezen af:

$$\operatorname{dom} g = [-2, 0[\cup [1, +\infty[$$

$$\operatorname{bld} g =]-\infty, -2[\cup \{2\}.$$

FUNCTIES 4

NULWAARDEN EN TEKENTABEL

De nulwaarden van een functie f zijn alle x-waarden waarvoor $f(x) = 0$. De verzameling van alle nulwaarden is

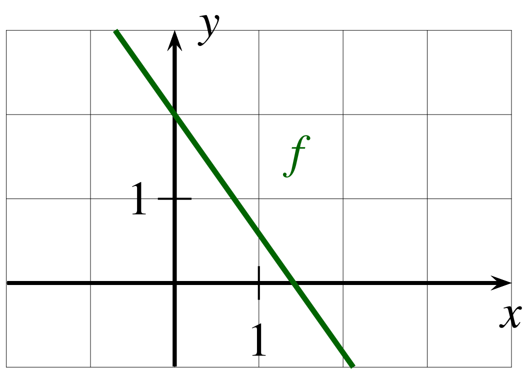
$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}}$$

Meetkundige betekenis: x-waarden waar de grafiek van f de x-as snijdt.

De tekentabel van een functie heeft in de eerste rij enkel x-waarden die een nulwaarde van f of randwaarde van $\operatorname{dom} f$ zijn; en in de tweede rij onder die x-waarden 0 (nulwaarde) of $+$, $-$ of $|$ (randwaarde met functiewaarde strikt positief, strikt negatief of bestaat niet) en voor elk interval tussen die x-waarden $+$, $-$, 0 of $///$ naargelang de y-waarden er strikt positief zijn, strikt negatief zijn, nul zijn of niet bestaan.

Meetkundige betekenis: waar grafiek van f boven, op of onder x-as ligt.

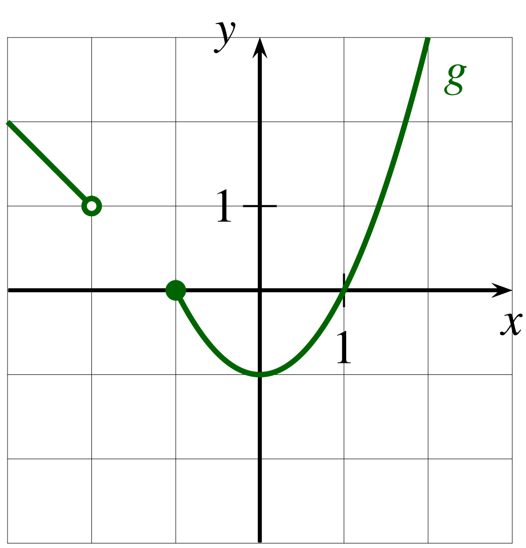
Voorbeeld 1. $f(x) = -\sqrt{2}x + 2$



Algebraïsch bepalen van nulwaarden:

$$\begin{aligned} \text{los op} \quad & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\sqrt{2}x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2. Functie g met nevenstaande grafiek. We lezen af:



- ▷ $\operatorname{dom} g = \,]-\infty, -2[\, \cup [-1, +\infty[$
- ▷ nulw.verz. $V = \{-1, 1\}$
- ▷ tekentabel

x		-2		-1		1	
$g(x)$	$+$	$\mid$	$///$	0	$-$	0	$+$

FUNCTIES 5

EXTREMA EN TABEL STIJGEN/DALEN

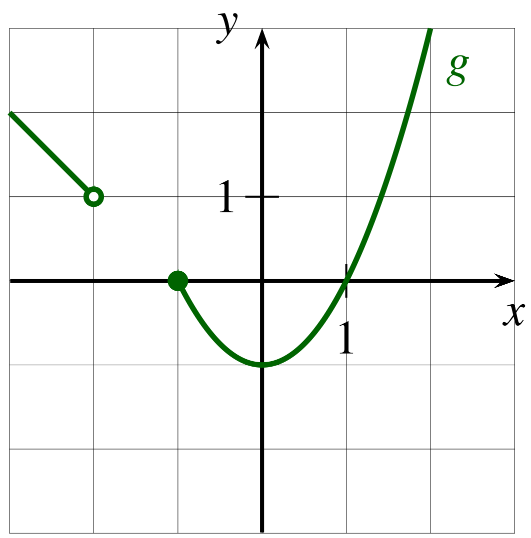
Een (lokaal) maximum van een functie f is een x-waarde waarvoor de functiewaarde groter is dan elke andere functiewaarde in een omgeving van x. Analoog spreken we over een (lokaal) minimum. Een maximum of minimum wordt ook wel een extremum genoemd.

Meetkundige betekenis: waar de grafiek van f plaatselijk een hoogste of een laagste punt bereikt.

De tabel stijgen/dalen van een functie heeft in de eerste rij enkel x-waarden die een extremum of randwaarde van het domein zijn; en in de tweede rij onder die extrema de symbolen max (maximum), min (minimum) of $|$ (randwaarde niet in domein) en voor elk interval tussen die x-waarden $\nearrow$, $\searrow$, $\longrightarrow$ of $///$ naargelang de y-waarden er toenemen, afnemen, gelijk blijven of niet bestaan.

Meetkundige betekenis: waar grafiek van f stijgend of dalend is.

Voorbeeld. Beschouw de functie g met nevenstaande grafiek.



We lezen af:

- $\triangleright$ $\operatorname{dom} g = \,]-\infty, -2[\, \cup \,[-1, +\infty[$
- $\triangleright$ extr.verz. $V = \{-1, 0\}$
- $\triangleright$ tabel stijgen/dalen

x		-2		-1		0	
$g(x)$	$\searrow$	$\vert$	$///$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

FUNCTIES 6

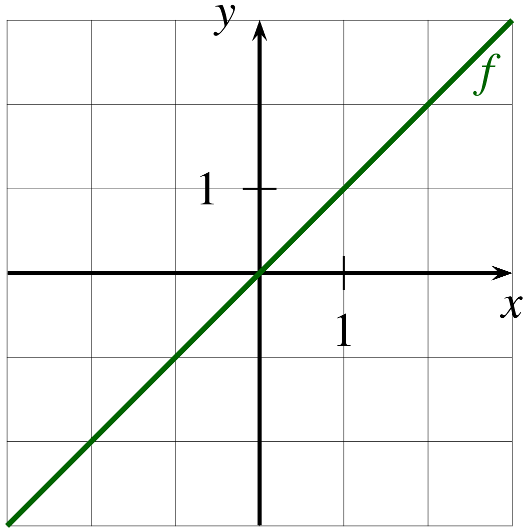
STANDAARDFUNCTIES

Heel wat verschijnselen rondom ons kun je beschrijven met een wiskundig model, waarin het begrip functie centraal staat. Veelvoorkomend zijn constante, lineaire, kwadratische en omgekeerde functies $f(x) = c/x$. Zij worden verkregen uit de onderstaande standaardfuncties.

Verwacht wordt dat je deze grafieken meteen voor de geest kan halen, want dan kun je de kenmerken van die functie gewoon aflezen.

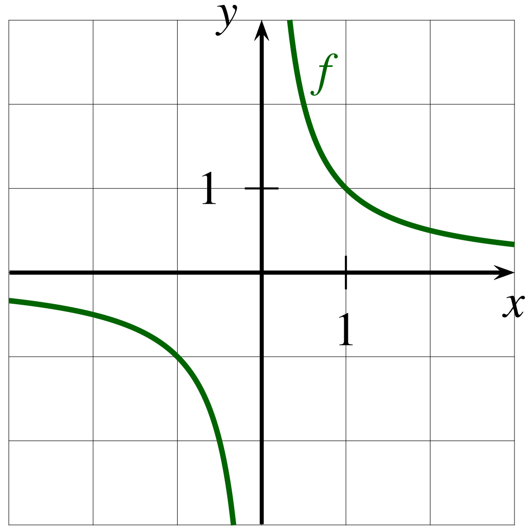
identieke functie

$f(x) = x$



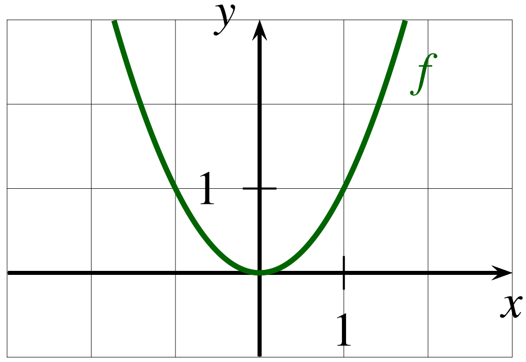
omgekeerde functie

$f(x) = \frac{1}{x}$



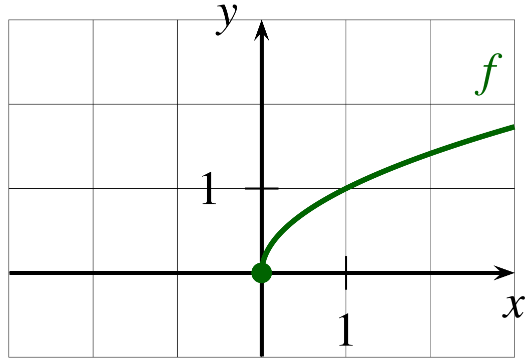
kwadratische functie

$f(x) = x^2$



positieve vierkantswortelfunctie

$f(x) = \sqrt{x}$



FUNCTIES 7

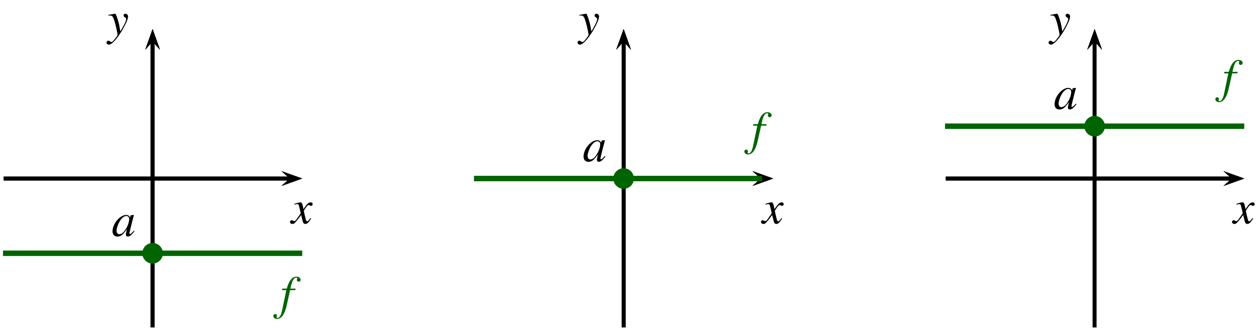
CONSTANTE FUNCTIES

Een constante functie is een functie f met als voorschrift

$$\boxed{f(x) = a \qquad \text{waarbij } \; a \in \mathbb{R}}$$

De grafiek is een horizontale rechte, met $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ en $\operatorname{bld} f = \{a\}$.

$\boxed{a < 0}$ of $\boxed{a = 0}$ of $\boxed{a > 0}$



Voorbeelden

(a) De volgende functies f, g en h zijn constante functies:

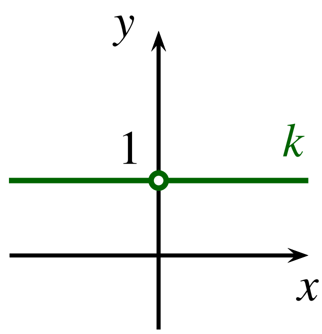
$$f(x) = 18, \qquad g(x) = 0, \qquad h(x) = -\sqrt{10} + \sin 60^\circ.$$

(b) De volgende functies i, j en k zijn geen constante functies:

$$i(x) = 3x - 7, \qquad j(x) = x^2, \qquad k(x) = \frac{x}{x}.$$

Dat laatste kun je inzien door het domein van k te bepalen:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} k &= \{x \in \mathbb{R} \mid k(x) \text{ bestaat}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{x}{x} \text{ bestaat}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}\\ &= \mathbb{R}_0 \neq \mathbb{R}.\end{aligned}$$



FUNCTIES 8

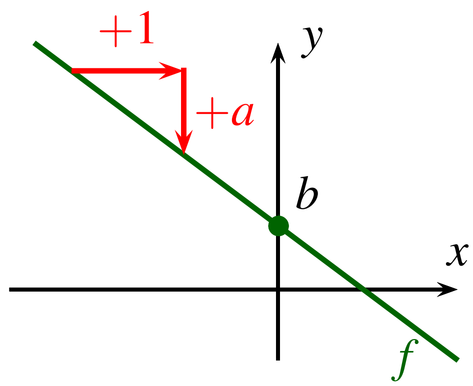
LINEAIRE FUNCTIES

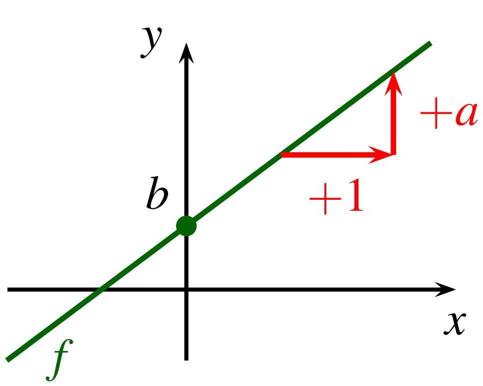
Een lineaire (of eerstegraads)functie is een functie f met als voorschrift in standaardvorm

$$\boxed{f(x) = ax + b \quad \text{waarbij } a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

De grafiek is een dalende rechte of een stijgende rechte. In elk van de twee gevallen is $\text{dom}\, f = \mathbb{R}$ en $\text{bld}\, f = \mathbb{R}$.

$\boxed{a < 0}$ of $\boxed{a > 0}$





Voorbeelden

(a) De volgende functies f, g en h zijn lineaire functies:

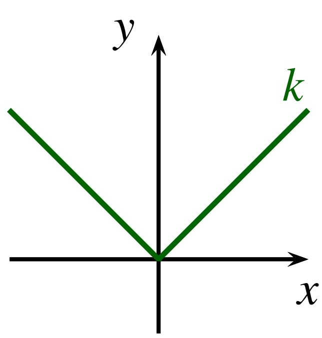
$$f(x) = x, \qquad g(x) = 2x - 3, \qquad h(x) = -35 + \sqrt{17}x.$$

(b) De volgende functies i, j en k zijn geen lineaire functies:

$$i(x) = 2023, \qquad j(x) = x^2, \qquad k(x) = \sqrt{x^2}.$$

Dat laatste kun je inzien door het functievoorschrift te herschrijven:

$$k(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0. \end{cases}$$



FUNCTIES 9

KWADRATISCHE FUNCTIES

Een kwadratische (of tweedegraads)functie is een functie f met als voorschrift in standaardvorm

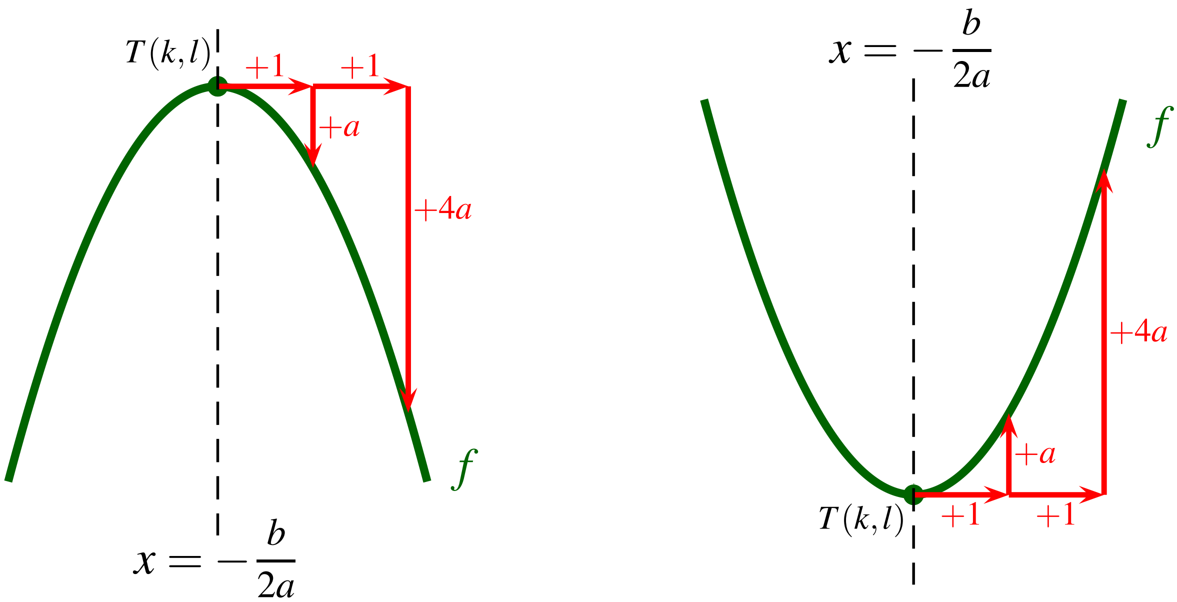
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{waarbij } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0}$$

Zo'n voorschrift kan steeds herschreven worden in topvorm

$$\boxed{f(x) = a(x-k)^2 + l \quad \text{waarbij } k = -\frac{b}{2a} \text{ en } l = f(k)}$$

De grafiek is een bergparabool of een dalparabool met top $T(k,l)$ en symmetrieas $x = k$. In elk van de twee gevallen is dom $f = \mathbb{R}$.

$\boxed{a < 0}$ of $\boxed{a > 0}$



Voorbeelden Van volgende functies zijn enkel f, g, h kwadratisch.

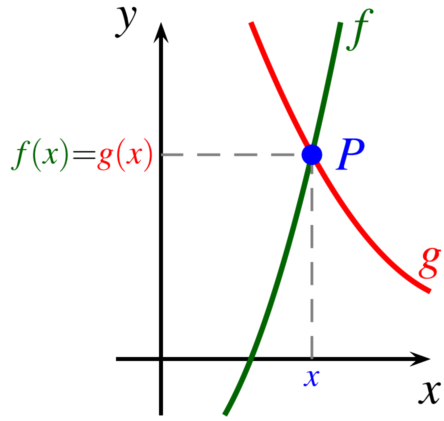
$f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{2}x^2 - x + \pi$ $\quad$ $h(x) = (5x-3)^2$

$i(x) = 25$ $\quad$ $j(x) = x + 1$ $\quad$ $k(x) = \sqrt{x^4 + 1}$

FUNCTIES 10

SNIJPUNTEN ZOEKEN

Beschouw twee functies f en g.



Als we de grafiek van f en de grafiek van g in één assenstelsel tekenen of schetsen, kunnen we op zoek gaan naar hun snijpunten: de punten P die zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g liggen.

Om die punten $P(x,y)$ te vinden, gaan we als volgt te werk:

$$\boxed{\text{in een } x\text{-waarde snijdt graf } f \text{ met graf } g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)}$$

Dus om snijpunten te vinden, lossen we de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.

Voorbeeld. Gegeven zijn $f(x) = -3x - 1$ en $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

In een x-waarde snijdt graf f met graf g

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

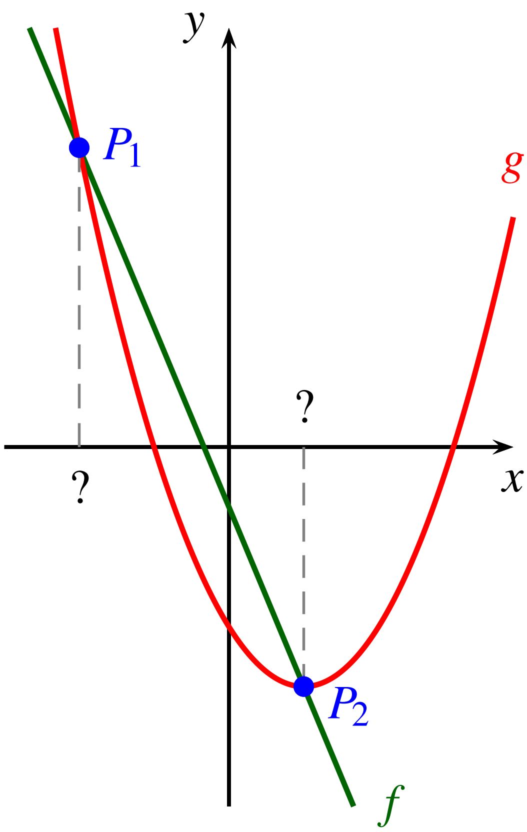
$$\Leftrightarrow \quad -3x - 1 = x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0 \\ \text{twee oplossingen} \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 \ \text{ of } \ x = 1.$$



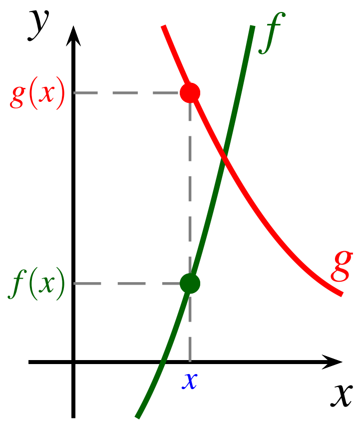
Dus de snijpunten van graf f met graf g zijn

$$P_1(-2, \underbrace{f(-2)}_{5}) \qquad \text{en} \qquad P_2(1, \underbrace{f(1)}_{-4}).$$

FUNCTIES 11

ONDERLINGE LIGGING BEPALEN

Beschouw twee functies f en g.



Als we de grafiek van f en de grafiek van g in één assenstelsel tekenen of schetsen, kunnen we op zoek gaan naar hun onderlinge ligging: de x-waarden waar de grafiek van f onder, op of boven de grafiek van g ligt.

Om na te gaan waar graf f onder graf g ligt, gaan we als volgt te werk:

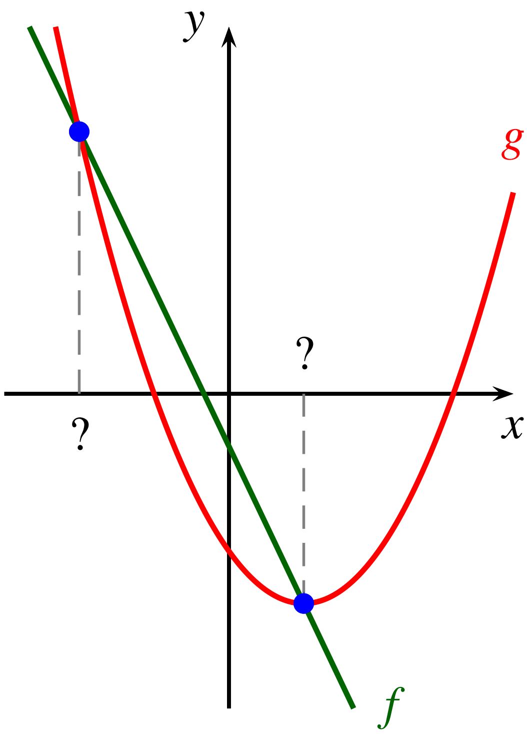
$$\boxed{\text{in een } x\text{-waarde ligt graf } f \text{ onder graf } g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x)}$$

Dus om onderlinge ligging te bepalen, lossen we een ongelijkheid op.

Voorbeeld. Gegeven zijn $f(x) = -3x - 1$ en $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

In een x-waarde ligt graf f onder graf g

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad f(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad -3x - 1 < x^2 - 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + x - 2}_{\text{noem } h(x)} > 0. \end{aligned}$$



Maak tekentabel van $h(x) = x^2 + x - 2$.

▷ nulwaarden: $h(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 1$

▷ tekentabel:

x		-2		1	
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dus graf f ligt onder graf g voor $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

ZOEKSTRATEGIEËN

Om een (basis)oefening op te lossen die aansluit bij pas geziene leerstof, gebruik je vaak een werkwijze die klassikaal werd aangeleerd.

Wil je een moeilijker of een meer algemeen probleem oplossen, moet je zelf een methode zoeken om het probleem op te lossen. Daarbij kunnen de volgende zoekstrategieën (of heuristieken) helpen:

- ▷ maak duidelijk wat het gegeven en het gevraagde is
- ▷ maak een schets of een tekening
- ▷ raad en controleer
- ▷ zoek een voorbeeld of een tegenvoorbeeld
- ▷ maak een lijst
- ▷ zoek een patroon
- ▷ los een eenvoudiger probleem op, zoals bijzondere of kleine gevallen
- ▷ schrijf eerst alle mogelijkheden op; en elimineer daarna
- ▷ werk van achter naar voor
- ▷ herformuleer het probleem
- ▷ deel het probleem op in kleinere problemen
- ▷ laat tijdelijk één van de voorwaarden vallen
- ▷ los een vergelijking op
- ▷ gebruik analogie of symmetrie
- ▷ gebruik een formule
- ▷ gebruik een model

De priemgetallen tussen 0 **en** 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

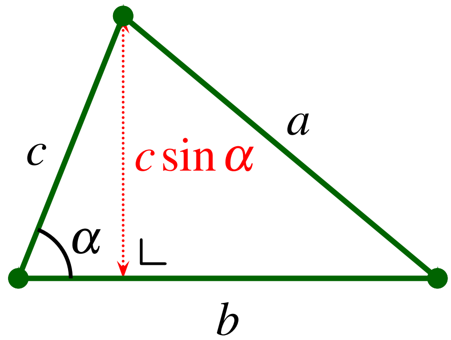
KWADRATEN EN DERDE MACHTEN

De kwadraten tussen 0 **en** 10 000									
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500
2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600
3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900
5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241	6400
6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921	8100
8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801	

De derde machten tussen 0 **en** 10 000									
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000
9261									

VLAKKE FIGUREN

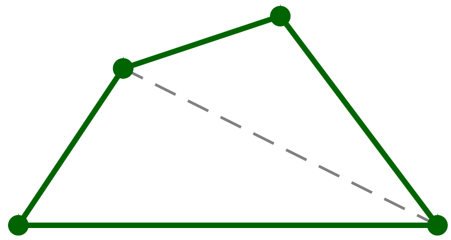
Driehoek



- ▷ som van de binnenhoeken $= 180^\circ$
- ▷ opp. $= \dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} = \dfrac{1}{2} bc \sin \alpha$
- ▷ opp. $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

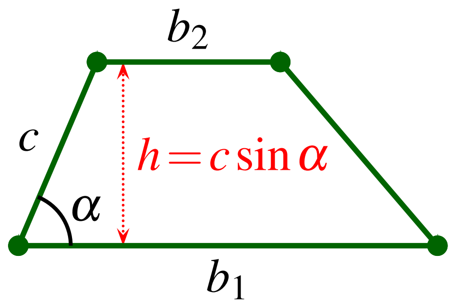
  met $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Vierhoek (niet gekruist)



- ▷ som van de binnenhoeken $= 360^\circ$
- ▷ opp. $=$ som oppervlakte driehoeken

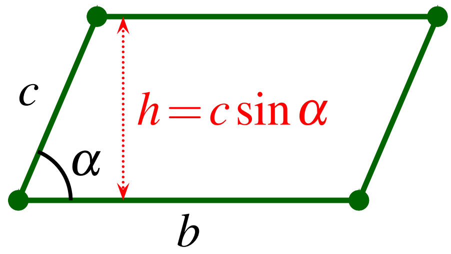
Trapezium



- ▷ minstens twee evenwijdige zijden
- ▷ opp. $= \dfrac{(\text{kl. basis} + \text{gr. basis}) \times \text{hoogte}}{2}$

  $= \dfrac{(b_1 + b_2)h}{2} = \dfrac{(b_1 + b_2) c \sin \alpha}{2}$

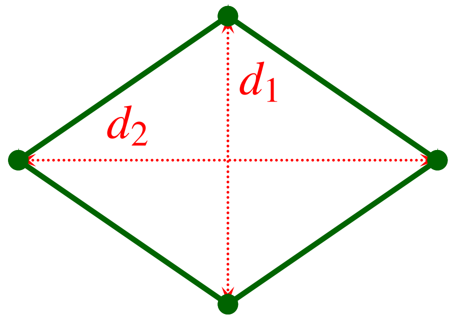
Parallellogram



- ▷ twee aan twee evenwijdige zijden
- ▷ opp. $=$ basis $\times$ hoogte

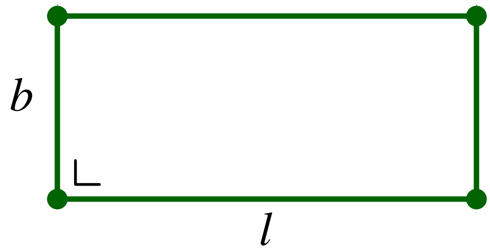
  $= bh = bc \sin \alpha$

Ruit



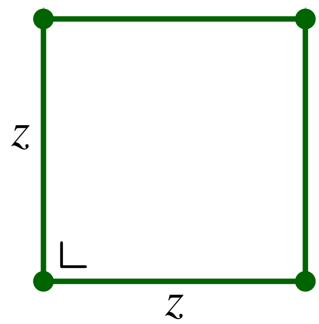
- ▷ vier gelijke zijden
- ▷ opp. $= \dfrac{\text{product van diagonalen}}{2}$
  $= \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Rechthoek



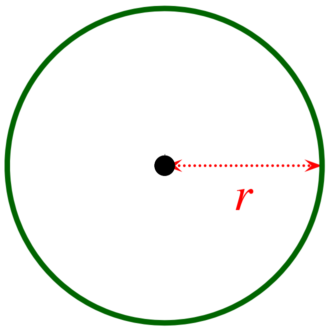
- ▷ vier rechte binnenhoeken
- ▷ opp. $=$ lengte $\times$ breedte $= l \cdot b$
- ▷ omtrek $= 2l + 2b$

Vierkant



- ▷ vier gelijke zijden twee aan twee loodrecht op elkaar
- ▷ opp. $=$ zijde $\times$ zijde $= z^2$
- ▷ omtrek $= 4z$

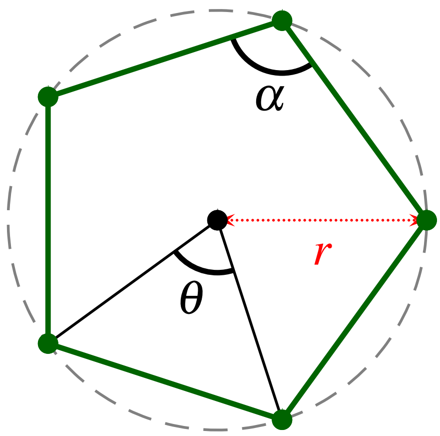
Cirkel met straal r



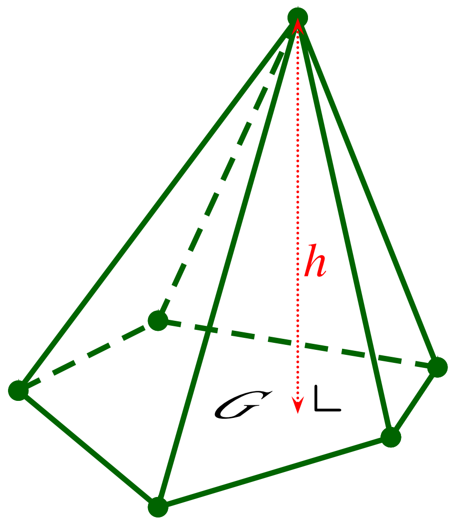
- ▷ opp. $= \pi r^2$
- ▷ omtrek $= 2\pi r$

Regelmatige veelhoek

- ▷ veelhoek met $n \geq 3$ hoekpunten, zijden niet gekruist en even lang, binnenhoeken even groot
- ▷ hoekpunten op cirkel met straal r
- ▷ middelpuntshoek $\theta = \dfrac{360°}{n}$
- ▷ som binnenhoeken $= (n-2) \cdot 180°$
- ▷ binnenhoek $\alpha = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$
- ▷ aantal diagonalen $= \dfrac{n(n-3)}{2}$
- ▷ opp. $= nr^2 \sin\left(\dfrac{180°}{n}\right) \cos\left(\dfrac{180°}{n}\right)$
- ▷ omtrek $= 2nr \sin\left(\dfrac{180°}{n}\right)$

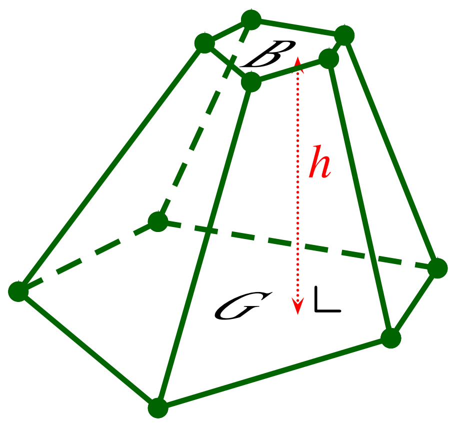


Piramide



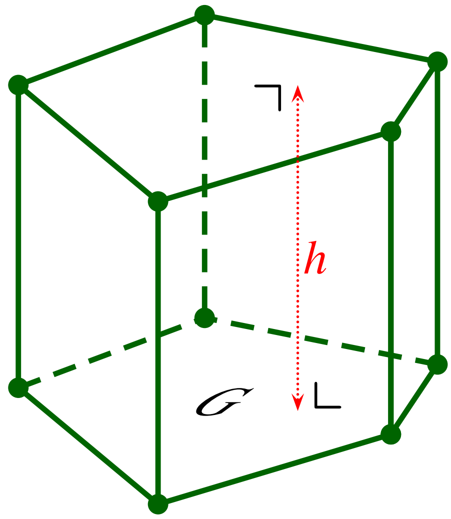
- ▷ veelhoek als grondvlak, waarvan de hoekpunten verbonden zijn met een punt buiten dit grondvlak
- ▷ zijvlakken zijn driehoeken
- ▷ vol. $= \dfrac{\text{opp. grondvlak} \times \text{hoogte}}{3} = \dfrac{1}{3} Gh$

Afgeknotte piramide



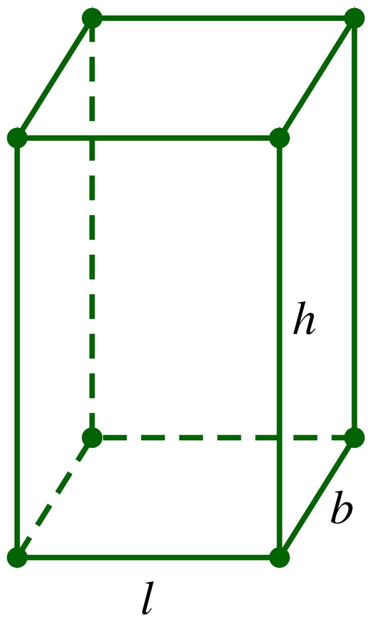
- ▷ deel van een piramide dat tussen twee parallelle vlakken ligt
- ▷ grondvlak (opp. G) is evenwijdig met bovenvlak (opp. B)
- ▷ zijvlakken zijn trapezia
- ▷ vol. $= \dfrac{1}{3} h \left(G + \sqrt{BG} + B \right)$

Prisma



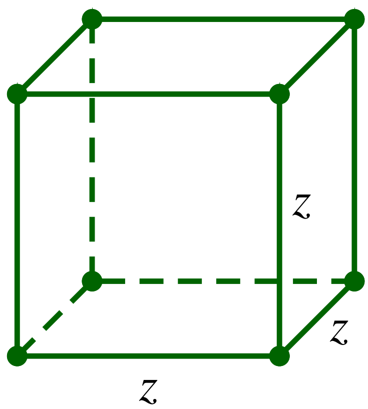
- ▷ twee parallelle, congruente en niet-gedraaide veelhoeken als grond- en bovenvlak met overeenkomstige hoekpunten verbonden
- ▷ zijvlakken zijn parallellogrammen
- ▷ vol. = opp. grondvlak × hoogte = Gh

Balk



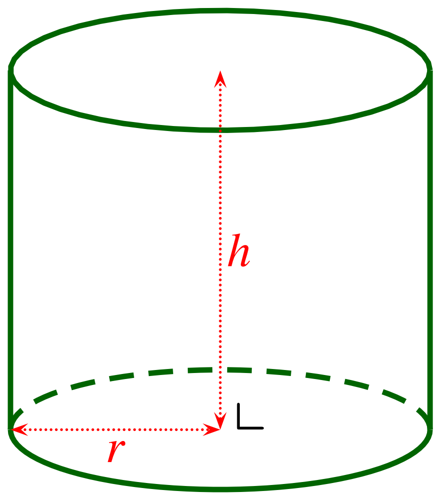
- ▷ prisma met rechthoek als grond- en bovenvlak en rechthoeken als zijvlakken
- ▷ vol. = lengte × breedte × hoogte = lbh
- ▷ opp. $= 2lb + 2lh + 2bh$

Kubus (regelmatig zesvlak)



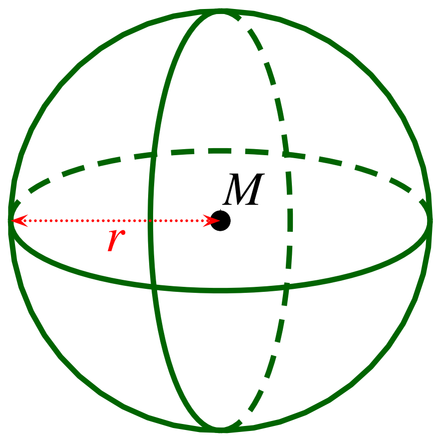
- ▷ prisma met zes congruente vierkanten als grondvlak, bovenvlak en zijvlakken
- ▷ alle ribben hebben dezelfde lengte z
- ▷ vol. $= z^3$
- ▷ opp. $= 6z^2$

Cilinder



- ▷ twee parallelle, congruente cirkels (straal r) als grond- en bovenvlak, loodrecht boven elkaar en verbonden
- ▷ ook: rechthoek wentelen om zijde
- ▷ vol. = opp. grondvl. × hoogte $= \pi r^2 h$
- ▷ mantelopp. $= 2\pi r h$
- ▷ totale opp. $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

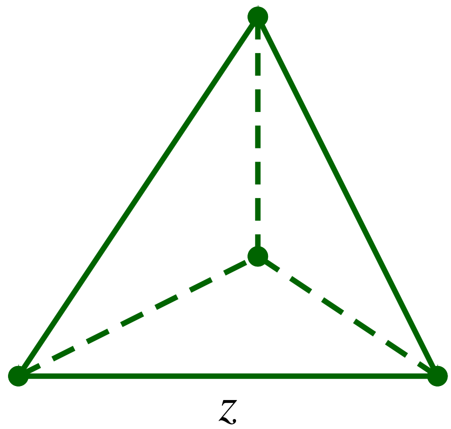
Bol



- ▷ alle punten in de ruimte op dezelfde afstand r van een vast punt M.
- ▷ ook: cirkel met straal r wentelen om een middellijn van die cirkel
- ▷ vol. $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$
- ▷ opp. $= 4\pi r^2$

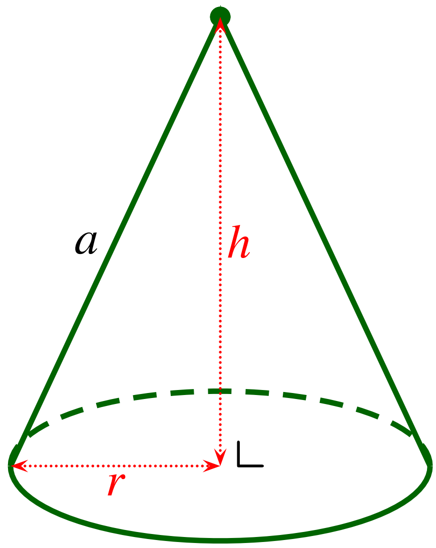
Tetraëder (regelmatig viervlak)

- piramide met vier congruente gelijkzijdige driehoeken als grond- en zijvlakken
- alle ribben hebben dezelfde lengte z
- vol. $= \dfrac{\sqrt{2}}{12} z^3$
- opp. $= \sqrt{3}\, z^2$



Kegel (rechte cirkelkegel)

- cirkel (straal r) als grondvlak en verbinden met een punt loodrecht boven het middelpunt van die cirkel
- ook: rechthoekige driehoek wentelen om één van de rechthoekszijden
- vol. $= \dfrac{\text{opp. grondvl.} \times \text{hoogte}}{3} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$
- apothema $a = \sqrt{r^2 + h^2}$
- mantelopp. $= \pi r a$
- totale opp. $= \pi r^2 + \pi r a$



SYMBOLEN

Logica uitspraken

Logica connectieven

Logica kwantoren

Verzamelingen voorstellen

Verzamelingen kenmerken

Verzamelingen kenmerken

Verzamelingen vergelijken

Verzamelingen bewerken

Getallen vergelijken

Bijzondere symbolen

Getallenverzamelingen

Bijzondere getallen

Getallen bewerkingen

Analytische meetkunde

Goniometrie hoeken

Goniometrie hoekwaarden

Goniometrische getallen

Driehoeksmeetkunde

Gelijkvormige driehoeken

Congruente driehoeken

Functies kenmerken

Functies voorstellen

GRIEKS ALFABET

Enkele letters uit het Grieks alfabet		
kleine letter	hoofdletter	lees als
α		alfa
β		bèta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε		epsilon
θ		thèta
κ		kappa
λ		lambda
μ		mu
π	Π	pi
σ	Σ	sigma
τ		tau
φ		phi
χ		chi
ψ		psi
ω	Ω	omega

TREFWOORDEN

H

I

K

L

NOTITIES

Wiskunde Samen gevat^2 is bedoeld om leerlingen tijdens en na hun tweede graad middelbaar onderwijs houvast te bieden bij het opzoeken, opnieuw begrijpen en onderhouden van basiskennis wiskunde.

Het is meer dan een formuleboekje: naast vele voorbeelden zijn ook redeneringen opgenomen, om op die manier te streven naar *onthouden met inzicht*.

Dit pocketboekje kan dienen als naslagwerk. Het opzoeken gebeurt met de inhoudstafel vooraan of de trefwoordenlijst achteraan, waar aansluitend veelvoorkomende symbolen, zoekstrategieën en figuren met formules zijn opgenomen. Je kan er het Grieks alfabet terugvinden, evenals enkele kwadraten, derde machten en priemgetallen.

De reeks *Wiskunde Samen gevat* kan ook in de les worden gebruikt. De leerkracht activeert dan systematisch onderwerpen om eerder geziene leerstof nog eens samen te vatten. Nadien kan afgesproken worden wat paraat gekend moet zijn.

9 781447 677109